Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 380-382

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__380_1>

CORRESPONDANCE.

Mon cher Brisse,

Les polynômes de M. Laguerre ont vivement intéressé, et à juste raison, les personnes qui s'occupent de la théorie des équations. Me sera-t-il permis de signaler une de leurs propriétés qui n'a pas encore été remarquée?

Soit

$$\begin{aligned}
f_m(x) &= a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m,\\
f_0(x) &= a_0,\\
f_1(x) &= a_0 x + a_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f_n(x) &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,\\
f_{n+1}(x) &= a_0 x^{n+1} + a_1 x^n + \ldots + a_{n+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots$ désignant des coefficients constants. On tire des deux dernières formules

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= x f_n + a_{n+1},\\
f_n &= x f_{n-1} + a_n,
\end{aligned}$$

d'où l'on conclut, en multipliant la première de ces équations par a_n, la seconde par a_{n+1}, et en retranchant,

$$f_{n+1} a_n = f_n(a_n x + a_{n+1}) - a_{n+1} f_{n-1}.$$

Nous supposerons $a_0, a_1, \ldots, a_m$ différents de zéro; nous pourrons alors écrire

$$f_{n+1} = f_n\left(x + \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - \frac{a_{n-1}}{a_n} f_{n-1}.$$

Cette formule montre que 1° deux fonctions f_n ne peuvent pas s'annuler en même temps, sans quoi, si f_{n-1} et f_n s'annulaient ensemble, il faudrait que f_{n-1} s'annulât en même temps, et ainsi de suite jusqu'à $f_0 = a_0$, qui par hypothèse est différent de zéro; 2° lorsque la fonction f_n s'annule, f_{n+1} et $\frac{a_{n+1}}{a_n} f_{n-1}$ sont de signes contraires. Il en résulte que les fonctions

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&f_m,\ f_{m-1},\ f_{m-2}\frac{a_m}{a_{m-1}},\ f_{m-3}\frac{a_{m-1}}{a_{m-2}},\ f_{m-4}\frac{a_{m-2}a_m}{a_{m-3}a_{m-1}},\\
&f_{m-5}\frac{a_{m-3}a_{m-1}}{a_{m-4}a_{m-2}},\ f_{m-6}\frac{a_{m-4}a_{m-2}a_m}{a_{m-5}a_{m-3}a_{m-1}},\ \ldots
\end{aligned}\right.$$

jouissent de la propriété essentielle des fonctions de Sturm, en sorte que, si, dans la suite précédente, on substitue à la place de x deux nombres α et β, le nombre de variations perdues ou gagnées (ce nombre ne pouvant se perdre ou se gagner que par le terme f_n) sera une limite inférieure du nombre des racines comprises entre α et β.

Veut-on, par exemple, une limite inférieure du nombre des racines positives de $f_m(x) = 0$, on fera $x = 0$ et $x = \infty$ dans la suite (1); en supposant $a_0 > 0$, ce qui est permis, on aura deux suites dont les signes seront ceux des suites

$$a_m,\ a_{m-1},\ \frac{a_{m-2}a_m}{a_{m-1}},\ \frac{a_{m-3}a_{m-1}}{a_{m-2}},\ \frac{a_{m-4}a_{m-2}a_m}{a_{m-3}a_{m-1}},\ \ldots,$$

$$1,\ 1,\ \frac{a_m}{a_{m-1}},\ \frac{a_{m-1}}{a_{m-2}},\ \frac{a_{m-2}a_m}{a_{m-3}a_{m-1}},\ \ldots,$$

ou même des suites

$$a_m,\ a_{m-1},\ a_m a_{m-1} a_{m-2},\ a_{m-1}a_{m-2}a_{m-3},\ a_m a_{m-1} a_{m-2} a_{m-3} a_{m-4},\ \ldots,$$

$$1,\ 1,\ a_m a_{m-1},\ a_{m-1}a_{m-2},\ a_m a_{m-1} a_{m-2} a_{m-3},\ \ldots.$$

Ce théorème, analogue à celui de Fourier, est beaucoup plus simple dans la pratique. H. LAURENT.