NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES DOSTOR

Formules de réduction trigonométrique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 362-367

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__362_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

FORMULES DE RÉDUCTION TRIGONOMÉTRIQUE;

PAR M. GEORGES DOSTOR.

1. THÉORÈME. — *Dans toute relation qui a lieu entre les trois angles* A, B, C *d'un triangle, on peut remplacer ces angles :* 1° *par les compléments de leurs moitiés,* 2° *par les suppléments de leurs doubles.*

En effet, puisque

$$A + B + C = \pi,$$

on a aussi 1°

$$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - \frac{A + B + C}{2} = \pi;$$

et 2°

$$(\pi - 2A) + (\pi - 2B) + (\pi - 2C) = 3\pi - 2(A + B + C) = \pi.$$

2. Appliquons ce principe aux deux formules bien connues et souvent employées

$$\text{(I)} \qquad \sin A + \sin B + \sin C = 2 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2},$$

$$\text{(II)} \qquad \operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C = \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C.$$

Si nous y remplaçons les angles A, B, C par les compléments $\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}$, $\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$ de leurs moitiés, elles deviendront

$$\text{(III)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2} \\ &= 4\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{C}{4}\right), \end{aligned} \right.$$

$$\text{(IV)} \qquad \cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$$

Cette dernière formule se trouve déjà établie, par un autre procédé, dans la *Trigonométrie* [1] de Frédéric Prosz, professeur à l'École polytechnique de Stuttgard.

Si, dans les relations (I) et (II), nous substituons aux angles A, B, C les suppléments de leurs doubles, elles se changeront dans les suivantes :

$$\text{(V)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C \\ &\qquad = 4\sin A\sin B\sin C, \end{aligned} \right.$$

$$\text{(VI)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\text{tang}\, 2A+\text{tang}\, 2B+\text{tang}\, 2C \\ &\qquad = \text{tang}\, 2A\,\text{tang}\, 2B\,\text{tang}\, 2C. \end{aligned} \right.$$

3. Avant de pousser ces applications plus loin, établissons une relation qui découle de la formule (I) et qui a son importance.

Nous avons

$$2\sin A = 4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B+C}{2}$$

ou

$$2\sin A = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2};$$

retranchant cette égalité membre à membre de (I), il

---

(1) *Lehrbuch der ebenen Trigonometrie und Polygonometrie*, von F. Prosz; Stuttgard, Paul Neff, 1840; p. 47.

nous vient

$$\text{(VII)} \quad \sin B + \sin C - \sin A = 4 \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} \cos\frac{A}{2} \quad ([1]).$$

En y faisant nos substitutions d'angles (n° 1), nous en tirons les nouvelles formules

$$\text{(VIII)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} - \cos\frac{A}{2} \\ &= 4 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}\right), \end{aligned} \right.$$

$$\text{(IX)} \quad \sin 2B + \sin 2C - \sin 2A = 4 \cos B \cos C \sin A.$$

4. Dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* de M. Catalan ([2]), M. Brocard a déduit de la formule (II) l'égalité des trois rapports, dont le premier est

$$\frac{\sin 2A}{\operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C}.$$

Nous allons faire voir que la valeur de ce rapport est symétrique par rapport aux trois angles A, B, C.

En effet, puisque

$$\frac{\sin 2A}{\operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C} = \frac{2 \sin A \cos A \cos B \cos C}{\sin B \cos C + \sin C \cos B} = \frac{\sin A \, 2 \cos A \cos B \cos C}{\sin(B + C)}$$

et que $\sin A = \sin(B + C)$, le rapport précédent a pour valeur

$$2 \cos A \cos B \cos C,$$

et, comme cette expression ne change pas par la permutation circulaire des trois angles A, B, C, nous avons

---

([1]) Cette formule se trouve aussi dans la *Trigonométrie* de Prosz, p. 43.

([2]) Septembre 1879, p. 324.

les relations

$$
(\mathrm{X})\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\sin 2A}{\operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C} = \frac{\sin 2B}{\operatorname{tang} C + \operatorname{tang} A}\\
&\quad = \frac{\sin 2C}{\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B} = 2\cos A \cos B \cos C.
\end{aligned}\right.
$$

On trouverait par la même méthode que

$$
(\mathrm{XI})\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\sin 2A}{1 - \cot B \cot C} = \frac{\sin 2B}{1 - \cot C \cot A} = \frac{\sin 2C}{1 - \cot A \cot B}\\
&\quad = 2 \sin A \sin B \sin C.
\end{aligned}\right.
$$

De ces formules, on tire les suivantes

$$
(\mathrm{XII})\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\operatorname{tang} B + \operatorname{tang} C}{1 - \cot B \cot C} = \frac{\operatorname{tang} C + \operatorname{tang} A}{1 - \cot C \cot A}\\
&\quad = \frac{\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B}{1 - \cot A \cot B} = \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C.
\end{aligned}\right.
$$

5. Dans les relations (X), (XI) et (XII), remplaçons les angles A, B, C par les compléments respectifs de leurs moitiés. Ces relations deviennent

$$
(\mathrm{XIII})\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\sin A}{\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}} = \frac{\sin B}{\cot \frac{C}{2} + \cot \frac{A}{2}}\\
&\quad = \frac{\sin C}{\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2}} = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{XIV})\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\sin A}{1 - \operatorname{tang} \frac{B}{2} \operatorname{tang} \frac{C}{2}} = \frac{\sin B}{1 - \operatorname{tang} \frac{C}{2} \operatorname{tang} \frac{A}{2}}\\
&\quad = \frac{\sin C}{1 - \operatorname{tang} \frac{A}{2} \operatorname{tang} \frac{B}{2}} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2},
\end{aligned}\right.
$$

$$(\mathrm{XV})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}{1-\tang\frac{B}{2}\tang\frac{C}{2}}=\frac{\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{A}{2}}{1-\tang\frac{C}{2}\tang\frac{A}{2}}\\ &=\frac{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}}{1-\tang\frac{A}{2}\tang\frac{B}{2}}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}. \end{aligned}\right.$$

6. D'autres formules méritent d'être signalées au lecteur; nous nous permettrons de citer les suivantes :

$$(\mathrm{XVI})\quad \left\{\begin{aligned} &\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A=2\sin B\sin C\cos A,\\ &\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}-\cos^2\frac{A}{2}=2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{XVII})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C}{\sin^2 A+\sin^2 C-\sin^2 B}=\frac{\tang B}{\tang C},\\ &\frac{\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}-\cos^2\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{C}{2}-\cos^2\frac{B}{2}}=\frac{\tang\frac{C}{2}}{\tang\frac{B}{2}}, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{XVIII})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}{2\sin A\sin B\sin C}=\cot A+\cot B+\cot C,\\ &\frac{\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\\ &\quad=\tang\frac{A}{2}+\tang\frac{B}{2}+\tang\frac{C}{2}, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{XIX})\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{2\sin A\sin B\sin C}{(\sin A+\sin B+\sin C)^2}=\tang\frac{A}{2}\tang\frac{B}{2}\tang\frac{C}{2},\\ &\frac{2\sin 2A\sin 2B\sin 2C}{(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)^2}=\cot A\cot B\cot C, \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{XX})\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{(\sin A + \sin B + \sin C)^2} = \frac{\cot A + \cot B + \cot C}{\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}},\\
&\frac{\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}}{\left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right)^2}\\
&\quad = \frac{\tang\frac{A}{2} + \tang\frac{B}{2} + \tang\frac{C}{2}}{\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{4}\right)\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{B}{4}\right)\cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)}.
\end{aligned}\right.$$