Composition mathématique pour l'admission à l'École polytechnique en 1880. Exposition sommaire d'une solution géométrique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 337-340

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__337_0>

COMPOSITION MATHÉMATIQUE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1880. EXPOSITION SOMMAIRE D'UNE SOLUTION GÉOMÉTRIQUE;

PAR UN ANCIEN ÉLÈVE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Soient M *et* N *les points où l'axe des x rencontre le cercle* $x^2 + y^2 = R^2$; *considérons une quelconque des hyperboles équilatères qui passent par les points* M *et* N; *menons, par un point* Q *pris arbitrairement sur le cercle, des tangentes à l'hyperbole.*

Soient A *et* B *les points où le cercle coupe la droite qui joint les points de contact. Démontrer que, des deux droites* QA *et* QB, *l'une est parallèle à une direction fixe et l'autre passe par un point fixe* P.

Le point P *étant donné, l'hyperbole équilatère correspondante qui passe par les points* M *et* N *est déterminée; on construira géométriquement son centre, ses asymptotes et ses sommets. Si le point* P *décrit la droite* $y = x$, *quel est le lieu décrit par les foyers de l'hyperbole? On déterminera son équation et on le construira.*

Commençons par quelques remarques. Appelons R et S les points d'intersection, autres que M et N, de l'hyperbole équilatère et de la circonférence. Il résulte du théorème de Frégier que *les tangentes en* R *et* S *à l'hyperbole sont perpendiculaires à* MN; par suite, *le point* C, *milieu de* RS, *est le centre de l'hyperbole.*

D'après un théorème connu, *les axes de cette courbe sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les droites* RS, MN. Connaissant le centre C et les axes, on a tout de suite les asymptotes.

Arrivons à la question proposée. Lorsque le point Q décrit la circonférence donnée, les droites QA, QB enveloppent une courbe. Du point arbitraire Q partent seulement deux droites QA, QB, et il n'y a pas d'autres droites telles que celles-ci qui contiennent Q; on ne peut alors mener de ce point que deux tangentes à cette courbe : donc c'est une conique.

Cette conique a pour tangentes les tangentes à l'hyperbole et au cercle menées aux points M, N, R, S : cela se voit tout de suite en faisant arriver le point Q en chacun de ces points [1]. Mais, parmi ces tangentes, il y en a quatre qui sont parallèles entre elles; cette conique ne peut être alors qu'une conique aplatie, et les quatre autres tangentes doivent passer par un même point P.

Toutes les tangentes à cette conique aplatie sont les unes perpendiculaires à MN et les autres passent par le point fixe P. Cela démontre la première partie de la question posée, et l'on voit en outre que *le point* P *est le pôle de* MN *par rapport à l'hyperbole équilatère.*

Le point P étant donné, l'hyperbole équilatère correspondante est déterminée, puisque l'on connaît les points M, N de cette courbe et les tangentes PM, PN en ces points. On peut ajouter, d'après ce qui précède : *Le pied de la perpendiculaire abaissée du point* O, *milieu de* MN, *sur la polaire de* P *par rapport au cercle, est le centre de cette hyperbole, et les bissectrices des angles*

---

[1] Ce que nous venons de dire pour cette conique est applicable lorsqu'au lieu d'une hyperbole et d'une circonference on donne deux coniques quelconques. Il en resulte que la conique enveloppe des droites telles que QA, QB est la même, que le point Q décrive l'une ou l'autre des coniques donnees. Du reste, on peut dire que cette conique est *l'enveloppe des droites qui sont partagées harmoniquement par les deux coniques données,* et dans cette génération rien ne distingue ces deux dernières courbes.

compris entre cette polaire et MN *donnent les directions de ses axes.*

Il est très simple alors d'avoir les asymptotes et les sommets de cette hyperbole.

D'après ce que nous venons de trouver, on voit que *les hyperboles équilatères qui correspondent aux différents points d'un diamètre de la circonférence donnée ont leurs centres sur ce diamètre et ont leurs axes parallèles entre eux.*

Appelons F, F' les foyers de l'hyperbole dont le centre est C, et prenons le rapport $\frac{CR}{CF}$. Lorsque P se déplace sur le diamètre OP, en restant au dehors de la circonférence, pour chacune de ses positions, on a une hyperbole qui donne un rapport analogue à $\frac{CR}{CF}$. Les droites telles que CR sont parallèles entre elles, ainsi que les droites telles que CF, et, comme les hyperboles équilatères sont des courbes semblables, nous concluons que les rapports tels que $\frac{CR}{CF}$ sont égaux entre eux. Par suite, *lorsque* P *est extérieur à la circonférence donnée, le lieu des foyers* F *est l'ellipse qu'on obtient en faisant tourner d'un même angle les ordonnées telles que* CR *de cette circonférence et en portant sur ces droites des longueurs proportionnelles à ces ordonnées.*

Cette ellipse a pour centre le point O et rencontre la circonférence donnée aux points I et L, où cette courbe est coupée par le diamètre que parcourt le point P. En ces points les tangentes à cette ellipse sont parallèles à CF. Une construction bien connue donne la direction de ses axes : il suffit de prendre les bissectrices des angles formés par les droites RF, RF'. Mais ces bissectrices sont la tangente et la normale à l'hyperbole équilatère en R :

donc cette ellipse, lieu des foyers F, a un axe dirigé suivant MN.

Enfin, si le point P, se déplaçant toujours sur le même diamètre OP, vient à l'intérieur de la circonférence donnée, il lui correspond des hyperboles équilatères dont les axes transverses sont perpendiculaires à CF. *Les foyers de ces courbes sont sur une hyperbole* dont le centre est O, qui a un axe dirigé suivant MN, qui passe par les points I et L, et qui, en ces points, rencontre à angle droit l'ellipse précédente.

D'après cela, *l'ellipse et l'hyperbole, lieux des foyers des hyperboles équilatères qui correspondent aux différents points d'un même diamètre* OP, *sont des courbes homofocales.*

Les foyers communs sont M *et* N. En effet, menons au point I la tangente à la circonférence donnée; appelons E le point où elle rencontre MN. Les tangentes en I à l'ellipse et à l'hyperbole lieux des foyers rencontrent cette même droite en T et U. Le point E est le milieu de TU. La circonférence décrite sur TU comme diamètre a pour centre E et pour tangente en I le rayon OI. On a alors $OT \times OU = \overline{OI}^2 = \overline{ON}^2$; donc, etc.