NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE D'OCAGNE

Démonstrations de théorèmes énoncés dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 304-307

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__304_0>

DÉMONSTRATIONS DE THÉORÈMES ÉNONCÉS DANS LES NOUVELLES ANNALES;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

La remarquable solution géométrique, donnée dans les *Nouvelles Annales*, de la question proposée à l'admission à l'École Polytechnique en 1878 contient les théorèmes suivants, dont l'auteur engage à rechercher les démonstrations. Voici ces théorèmes :

1. *On a un triangle isoscèle atb. On mène les deux hauteurs tc, ao : ces droites se coupent en u. On prolonge tc jusqu'en s, de façon que cs soit égale à la distance du point o à la base ab. On joint le point a au point s et le point a au point z, milieu de tu : démontrer que l'angle zas est droit* (¹).

Si oh est la perpendiculaire abaissée du point o sur la base ab, on a

$$\frac{cu}{oh} = \frac{ac}{ah},$$

d'où

$$oh \times cu = \frac{\overline{oh}^2 \times ac}{ah},$$

et

$$\frac{tc}{oh} = \frac{bc}{bh},$$

d'où

$$oh \times ct = \frac{\overline{oh}^2 \times bc}{bh} = \frac{\overline{oh}^2 \times ac}{bh}.$$

(¹) Voir 2e série, t. XVII, p. 411.

Additionnons membre à membre; il vient

$$oh(cu + ct) = \overline{oh}^2 \times ac.\frac{ah + bh}{ah \times bh}$$

ou

$$2cs \times cz = \overline{cs}^2 \times \frac{2\overline{ac}^2}{\overline{cs}^2};$$

par suite,

$$cs \times cz = \overline{ac}^2,$$

ce qui démontre que l'angle saz est droit.

2. *On a un triangle boa et les points a' et b', milieux des côtés oa, ob; on prend un point quelconque m sur la base; on a*

$$\frac{ma}{mb} = \frac{\overline{a'm}^2 - \overline{oa'}^2}{\overline{b'm}^2 - \overline{ob'}^2} \quad (^1).$$

Tirons om et projetons a' et b' en h et i sur cette droite. Si $a'b'$ coupe om en n, ce point est le milieu de om, et l'on a

$$\overline{a'm}^2 - \overline{oa'}^2 = 2\,om \times hn,$$

$$\overline{b'm}^2 - \overline{ob'}^2 = 2\,om \times in.$$

Donc

$$\frac{\overline{a'm}^2 - \overline{oa'}^2}{\overline{b'm}^2 - \overline{ob'}^2} = \frac{hn}{in} = \frac{na'}{nb'} = \frac{ma}{mb}.$$

C. Q. F. D.

3. *Un point d'une conique, le pied de la perpendiculaire abaissée du centre sur la tangente en ce point et les extrémités de l'un des axes sont sur une même circonférence de cercle* (2).

---

(1) T. XVII, p. 412.

(2) T. XVII, p. 413, et t. XIX, p. 7.

Soient m un point d'une conique de centre o, mt la tangente en ce point qui coupe l'axe aa' en t, i le pied de la perpendiculaire abaissée de o sur mt. Sur l'axe aa' comme diamètre je décris une circonférence, et du point m j'abaisse sur aa' la perpendiculaire mh qui coupe cette circonférence en μ et aa' en h; μt est tangente en μ à la circonférence.

Le quadrilatère $mhoi$ étant inscriptible, on a

$$tm \times ti = th \times to.$$

Mais le triangle rectangle $o\mu t$ donne

$$th \times to = \overline{t\mu}^2.$$

Donc

$$tm \times ti = \overline{t\mu}^2 = ta \times ta'.$$

Par suite, le quadrilatère $amia'$ est inscriptible.

On ferait une démonstration analogue pour les sommets b, b'.

Ce théorème nous a conduit au suivant :

Si la tangente au point m d'une conique coupe l'axe oa en t et l'axe ob en s, on a

$$\frac{st}{mt} = \frac{\overline{os}^2}{\overline{ob}^2} \quad \text{et} \quad \frac{st}{ms} = \frac{\overline{ot}^2}{\overline{oa}^2}.$$

En effet, le triangle rectangle sot donne

$$(1) \qquad \overline{os}^2 = si \times st$$

ou

$$\left(\frac{sb' + sb}{2}\right)^2 = si \times sm + si \times mt.$$

Mais, d'après le théorème précédent,

$$si \times sm = sb \times sb'.$$

Donc

$$\left(\frac{sb' + sb}{2}\right)^2 - sb \times sb' = si \times mt$$

ou

$$\left(\frac{sb' - sb}{2}\right)^2 = si \times mt,$$

c'est-à-dire

(2) $$\overline{ob}^2 = si \times mt.$$

Divisant (1) et (2) membre à membre, il vient

$$\frac{\overline{os}^2}{\overline{ob}^2} = \frac{st}{mt}.$$

On établirait de même la seconde relation.