NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE D'OCAGNE

Applications de géométrie cinématique plane

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 264-277

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__264_1>

APPLICATIONS DE GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE PLANE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée Fontanes.

Voici quelques nouvelles applications élémentaires des principes si élégants et si féconds de la Géométrie cinématique, qui, réunis en corps de doctrine par M. Mannheim, constituent aujourd'hui, grâce à l'éminent professeur, une branche importante de la science géométrique ([1]). Au moyen de ces principes, je suis arrivé, dans différentes recherches élémentaires, à plusieurs résultats nouveaux qui se trouvent consignés dans cette Note. Après un problème sur la parabole, les questions que je traite ici se rapportent au centre de courbure de l'ellipse, au point où la droite de Simson touche son enveloppe, à la cissoïde, à la strophoïde, à la conchoïde, à la spirale d'Archimède, aux caustiques, aux anamorphoses et aux podaires.

I. — Question sur la parabole.

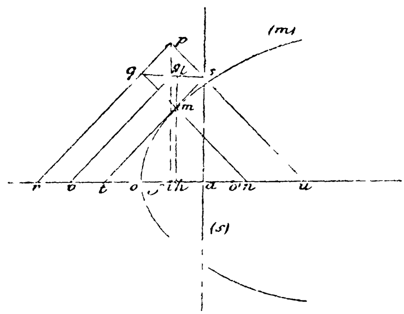
L'un des côtés d'un angle droit dont le sommet décrit une droite enveloppe une parabole dont l'axe est perpendiculaire à cette droite : trouver l'enveloppe de l'autre côté de cet angle.

Soient (s) la droite que décrit le sommet s (*fig.* 1), (m) la parabole enveloppée par le côté st qui la touche au point m, su le côté dont nous cherchons l'enveloppe. Remarquons d'abord que cette enveloppe a évidemment pour axe de symétrie l'axe de la parabole donnée. Cherchons maintenant, pour la position considérée, la normale à l'enveloppe de su. La normale à la trajectoire du point s est la perpendiculaire sq à (s); la normale mn à la parabole (m) coupe sq en q; du point q abaissons sur su la perpendiculaire qp; su touche son enveloppe au point p, et pq est la normale à cette enveloppe; pq coupe l'axe en r; du point p abaissons sur cet axe la

([1]) Voir Mannheim, *Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique* (Gauthier-Villars, 1880).

perpendiculaire pi qui coupe sq en g; ri est la sous-normale à l'enveloppe cherchée, relative au point p; du

Fig. 1.



point m abaissons sur l'axe la perpendiculaire mh qui coupe sq en l; enfin, par le point g menons gv parallèlement à st. Cela fait, on voit que

$$rv = qg = ls = ha,$$

et que

$$vi = ta;$$

par suite

$$ri = rv + vi = ah + at.$$

Comme le sommet o est le milieu de la sous-tangente th, on a

$$ah + at = 2ao,$$

ou

$$ri = 2ao.$$

La sous-normale est donc constante et l'enveloppe cherchée est une parabole dont le paramètre est $2oa$. Le sommet o' de cette parabole est le milieu de la sous-tangente iu.

On établit, absolument comme nous venons de le faire pour la relation précédente, que

$$hn = 2ao'.$$

Alors le foyer de la parabole (m) est à une distance du sommet o égale à ao'; le foyer de la parabole (p), enveloppe de su, est à une distance du sommet o' égale à ao; ces deux foyers coïncident donc, et ce foyer commun f est le symétrique du point a par rapport au milieu de oo'.

On est ainsi conduit à ce théorème :

Le lieu du sommet d'un angle droit dont les côtés sont respectivement tangents à deux paraboles coaxales et confocales est une droite perpendiculaire à l'axe commun et qui divise le segment compris entre les sommets en parties inversement proportionnelles aux paramètres de ces paraboles.

II. — Sur le centre de courbure de l'ellipse.

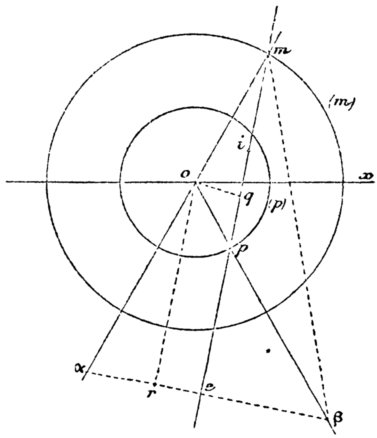
Considérons deux circonférences concentriques (m) et (p) et une droite fixe ox passant par le centre commun o (*fig.* 2); tirons les rayons om et op également inclinés sur ox.

On sait, et cela est une conséquence immédiate du procédé de M. Chasles pour construire les axes d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués, que le milieu i de mp décrit, lorsque les droites om et op varient, une ellipse (i) ayant o pour centre et un axe dirigé suivant ox, que la somme des axes de cette ellipse est égale à om et leur différence à op, que mp est normale à cette ellipse, enfin que les segments mi et pi sont tous deux égaux au demi-diamètre conjugué du diamètre oi dans l'ellipse (i).

Pour avoir le centre de courbure de l'ellipse (i) relatif au point i, cherchons donc le point où mp touche son enveloppe. Soit e ce point; la perpendiculaire à mp au point e coupe en α la normale mo au lieu que décrit le point m et en β la normale po au lieu que décrit le point p.

Si nous représentons par $d(m)$ et $d(p)$ deux déplace-

Fig. 2.



ments infiniment petits correspondants des points m et p respectivement sur les circonférences (m) et (p), nous avons [1]

$$\frac{d(m)}{d(p)} = \frac{m\alpha}{p\beta}.$$

Mais, les angles xom et xop étant constamment égaux entre eux, on a

$$\frac{d(m)}{d(p)} = \frac{om}{op};$$

donc

$$\frac{m\alpha}{p\beta} = \frac{om}{op} \quad \text{ou} \quad \frac{m\alpha}{om} = \frac{p\beta}{op}.$$

Du point o abaissons sur mp la perpendiculaire oq et

---

[1] Mannheim, Ouvrage cité, p. 204.

sur $\alpha\beta$ la perpendiculaire or. Nous avons

$$\frac{p\beta}{op} = \frac{e\beta}{re} = \frac{e\beta}{oq}.$$

Mais

$$\frac{m\alpha}{om} = \frac{e\alpha}{oq};$$

donc

$$\frac{e\beta}{oq} = \frac{e\alpha}{oq} \quad \text{ou} \quad e\beta = e\alpha;$$

par suite,

$$\widehat{\beta me} = \widehat{\alpha me},$$

d'où la construction :

Pour avoir le centre de courbure relatif au point i de l'ellipse (i), je porte sur la normale au point i, de part et d'autre de ce point, les longueurs im et ip, toutes deux égales au demi-diamètre conjugué du diamètre io. Je tire la ligne $m\beta$ faisant avec la normale mp un angle égal à l'angle omp; $m\beta$ coupe op au point β; du point β j'abaisse sur mp la perpendiculaire βe; le pied e de cette perpendiculaire est le centre de courbure cherché.

Si donc on connaît deux diamètres conjugués d'une ellipse, on obtiendra facilement, par cette construction, les centres de courbure relatifs aux extrémités de ces diamètres, sans qu'il soit besoin de déterminer les axes de cette ellipse.

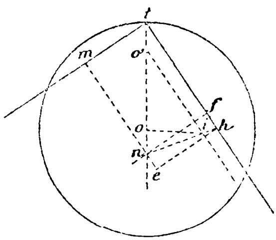
La construction précédente peut être modifiée en partant de cette remarque, faite plus haut, que om est égale à la somme des axes de l'ellipse (i) et op à leur différence.

On voit facilement que les points e et q sont conjugués harmoniques par rapport aux points m et p, ce qui constitue un théorème de M. Chasles (¹).

PROBLÈME. — *Trouver le centre de courbure de l'ellipse considérée comme enveloppe d'un côté d'un angle droit dont le sommet parcourt une circonférence, l'autre côté passant par un point fixe* (²).

Soient f (*fig.* 3) le point fixe autour duquel pivote le

Fig. 3.



côté tf de l'angle droit mth, et o le centre de la circonférence que décrit le sommet t.

La normale to au lieu de t coupe en n la normale fn à l'enveloppe de tf. Du point n abaissons sur l'autre côté de l'angle droit la perpendiculaire nm; le côté tm touche son enveloppe au point m et la normale en ce point est mn.

Remarquons, en passant, que de cette construction résulte le théorème suivant :

La droite qui joint les projections d'un foyer d'une ellipse sur la tangente et sur la normale en un point de cette courbe passe par le centre de l'ellipse.

(¹) *Journal de Liouville*, 1^re série, t. X, p. 208.

(²) GILBERT, *Méc. anal.*, p. 61, ex. 5.

On voit facilement que le théorème est également vrai pour l'hyperbole et la parabole.

Cela posé, avant de déterminer le centre de courbure relatif au point m, c'est-à-dire le point où mn touche son enveloppe, cherchons la normale au lieu que décrit le point n. Soit nh cette normale. Considérons alors le triangle fnt.

Le point f étant fixe, la perpendiculaire fn à tf coupant en n la normale to au lieu décrit par t, et la perpendiculaire fh à nf coupant en h la normale nh au lieu décrit par n, on a

$$\frac{d(t)}{d(n)} = \frac{tn}{nh}.$$

Mais o étant le point où tn touche son enveloppe et oi la normale à cette enveloppe, on a aussi

$$\frac{d(t)}{d(n)} = \frac{to}{ni}.$$

Donc

$$\frac{tn}{nh} = \frac{to}{ni} \quad \text{ou} \quad \frac{ni}{nh} = \frac{ot}{nt}.$$

Par le point i menons io' parallèlement à tf; nous avons

$$\frac{ni}{nh} = \frac{no'}{nt}.$$

Il en résulte que $no' = ot$. Le point i est ainsi déterminé, et par suite la normale nh.

Considérons alors le triangle mtn. Le côté tm touche son enveloppe au point m, le côté tn au point o et le côté mn au point e, centre de courbure cherché. De plus, mn est la normale au lieu décrit par m, to la normale au lieu décrit par t, nh la normale au lieu décrit par n; nous avons donc, en appelant h_1 le point où la perpendiculaire à *mn* en *e* coupe *hn*,

$$\frac{d(n)}{d(m)} = \frac{nh_1}{me},$$

$$\frac{d(t)}{d(n)} = \frac{to}{ni},$$

$$\frac{d(m)}{d(t)} = \frac{me}{tn}.$$

Multipliant ces égalités membre à membre, il vient

$$1 = \frac{nh_1 \cdot to}{ni \cdot tn} = \frac{nh_1 \cdot no'}{ni \cdot nt}$$

ou

$$\frac{nh_1}{ni} = \frac{nt}{no'}.$$

ce qui montre que le point h_1 coïncide avec le point h.

La construction du point e sera donc la suivante :

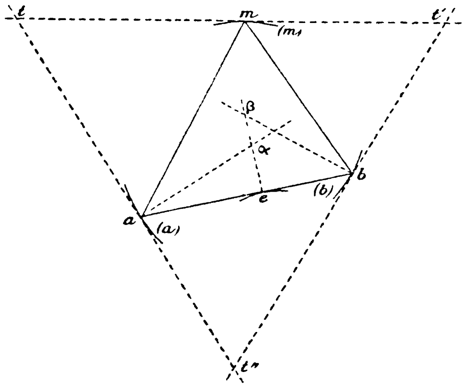
Une fois la normale mn tracée, on porte sur to la longueur $no' = ot$; *par le point o on mène la droite oi perpendiculairement à ot, et par o' la droite o'i parallèlement à th; ces droites se coupent en i; on tire ni qui rencontre tf en h; enfin, de h on abaisse sur mn la perpendiculaire he : le point e est le centre de courbure cherché.*

III. — Sur le point où la droite de Simson touche son enveloppe.

Question préliminaire. — *Un triangle variable amb se déplace de façon que ses sommets décrivent des courbes données (a), (m) et (b), et que ses côtés ma et mb restent constamment parallèles à des directions données : déterminer le point où le côté ab touche son enveloppe (fig. 4).*

Soit e le point où ab touche son enveloppe; la normale à cette courbe au point e coupe en α et β les normales $a\alpha$ et $b\beta$ aux courbes (a) et (b). Soient, de plus,

Fig. 4.



t, t' et t'' les points où se coupent deux à deux les tangentes aux courbes (a), (m) et (b) aux points a, m et b.

D'après un principe de Géométrie cinématique ([1]), on a, en représentant par $d(a)$, $d(b)$ et $d(m)$ des déplacements infiniment petits correspondants des points a, b et m sur leurs trajectoires,

$$\frac{d(a)}{d(m)} = \frac{at}{mt}, \tag{1}$$

$$\frac{d(m)}{d(b)} = \frac{mt'}{bt'}, \tag{2}$$

et

$$\frac{d(b)}{d(a)} = \frac{bt''.be}{at''.ae}, \tag{3}$$

ou, d'après le principe dont nous avons fait usage dans

([1]) MANNHEIM, Ouvrage cité, p. 208.

le paragraphe précédent,

$$(3') \qquad \frac{d(b)}{d(a)} = \frac{b\beta}{a\alpha}.$$

Multiplions membre à membre les égalités (1), (2) et (3) ; il vient

$$1 = \frac{at.mt'.bt''.be}{mt.bt'.at''.ae}$$

ou

$$(4) \qquad \frac{ae}{be} = \frac{at.mt'.bt''}{mt.bt'.at''}.$$

Multiplions maintenant membre à membre les égalités (1), (2) et (3'); il vient

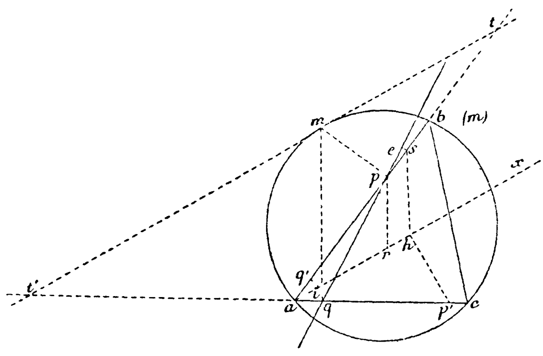
$$1 = \frac{at.mt'.b\beta}{mt.bt'.a\alpha}$$

ou

$$(4') \qquad \frac{a\alpha}{b\beta} = \frac{at.mt'}{mt.bt'}.$$

Des formules (4) et (4') résultent, pour le point e, deux procédés de détermination différents. Cela posé, cherchons le point où la droite de Simson touche son enveloppe.

Fig. 5.



1° Soit abc le triangle considéré (*fig.* 5). D'un point quelconque m pris sur la circonférence (m) circonscrite à ce triangle, abaissons les perpendiculaires mp et mq sur les côtés ab et ac, et cherchons le point où la droite pq touche son enveloppe.

Dans le triangle mpq, le sommet m décrit la circonférence (m); le sommet p, la droite ab; le sommet q, la droite ac; de plus, les côtés mp et mq se déplacent parallèlement à eux-mêmes, puisqu'ils sont constamment perpendiculaires, l'un à la droite ab, l'autre à la droite ac. Appliquons donc au triangle mpq la formule (4) établie précédemment; pour cela, menons à la circonférence (m) la tangente au point m, qui coupe ab en t et ac en t'. Nous avons

$$\frac{qe}{pe} = \frac{qt' . mt . pa}{mt' . pt . qa}.$$

Mais

$$\frac{qt'}{mt'} = \cos \widehat{mt'q}$$

et

$$\frac{pt}{mt} = \cos \widehat{mtp};$$

donc

$$\frac{qe}{pe} = \frac{pa . \cos \widehat{mt'q}}{qa . \cos \widehat{mtp}}.$$

Nous déduisons de cette relation la construction suivante du point e :

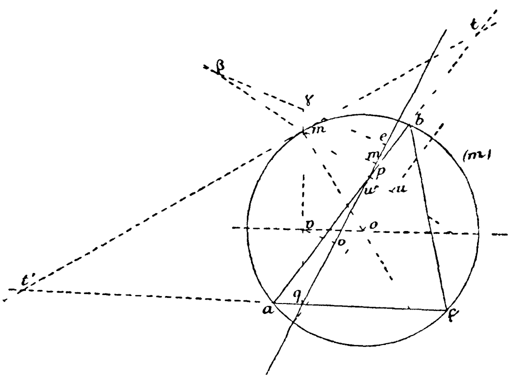
Par le sommet a, menons à la tangente tt' la parallele ax; portons respectivement sur ab et sur ac les longueurs $aq' = aq$ et $ap' = ap$; des points q' et p' abaissons sur ax les perpendiculaires $q'i$ et $p'h$, qui rencontrent ax aux points i et h; portons sur ax la longueur $hr = ia$; tirons pr; par le point h, menons à pr la parallèle hs, qui coupe ab au point s; enfin, par le *point s, menons à ac la parallèle se, qui coupe pq au point e : e est le point cherché.*

Nous avons, en effet,

$$\frac{qe}{pe} = \frac{as}{ps} = \frac{ah}{rh} = \frac{ah}{ai} = \frac{p'a \cos\widehat{p'ax}}{q'a.\cos\widehat{q'ax}} = \frac{pa.\cos\widehat{mt'q}}{qa.\cos\widehat{mtp}}.$$

2° Appliquons maintenant la formule (4'). La per-

Fig 6.



pendiculaire $\beta\gamma$ à pq, au point e cherché, coupe mp en β et mq en γ (*fig.* 6). Nous avons alors

$$\frac{q\gamma}{p\beta} = \frac{qt'.mt}{mt'.pt}$$

ou, d'après ce qui a déjà été vu,

$$\frac{q\gamma}{p\beta} = \frac{\cos\widehat{mt'q}}{\cos\widehat{mtp}}.$$

Joignons le point m au centre o de la circonférence (m); la droite mo étant perpendiculaire à tt', nous avons

$$\widehat{mt'q} = \widehat{omq} \quad \text{et} \quad \widehat{mtp} = \widehat{omp}.$$

Donc

$$\frac{q\gamma}{p\beta} = \frac{\cos \widehat{omq}}{\cos \widehat{omp}}.$$

Par le point o menons à ab et à ac les parallèles ou et ov qui coupent mp et mq en u et en v à angle droit. Alors

$$\frac{mv}{mu} = \frac{mo.\cos \widehat{omq}}{mo.\cos \widehat{omp}} = \frac{q\gamma}{p\beta}.$$

Mais

$$q\gamma = \frac{qe}{\cos \widehat{mqe}} \quad p\beta = \frac{pe}{\cos \widehat{mpe}};$$

par suite

$$\frac{mv}{mu} = \frac{qe.\cos \widehat{mpe}}{pe.\cos \widehat{mqe}}$$

ou

$$\frac{qe}{pe} = \frac{mv.\cos \widehat{mqe}}{mu.\cos \widehat{mpe}}.$$

Des points m, u et v abaissons sur pq les perpendiculaires mm', uu' et vv'. Nous avons

$$m'v' = mv.\cos \widehat{mqe},$$

$$m'u' = mu.\cos \widehat{mpe}.$$

Par conséquent,

$$\frac{qe}{pe} = \frac{m'v'}{m'u'}.$$

Nous obtenons ainsi très simplement la valeur du rapport dans lequel le point e divise la droite pq, ce qui fournit une nouvelle construction facile de ce point.

(*A suivre.*)