Ch. Vénard

Sur une règle de M. Laguerre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 261-264

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__261_1>

SUR UNE RÈGLE DE M. LAGUERRE;

PAR M. CH. VÉNARD,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Rennes.

M. Laguerre a fait voir (même tome, p. 50) qu'un nombre a est une limite supérieure des racines positives d'une équation $f(x) = 0$ si la suite des nombres obtenus en formant le quotient et le reste de la division de $f(x)$ par $x - a$ ne présente que des permanences. Je dis que cette limite a est supérieure ou au moins égale à la limite fournie par la suite connue de Newton.

Soient $f_0, f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}, f_m$ les coefficients du quotient et le reste de la division de

$$f(x) = A_0 x^m + \ldots + A_{m-1} x + A_m$$

par $x - a$. On sait qu'entre ces nombres on a les relations

$$\begin{aligned} f_m &= a f_{m-1} + A_m, \\ f_{m-1} &= a f_{m-2} + A_{m-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_{m-p} &= a f_{m-p-1} + A_{m-p}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_1 &= a f_0 + A_1, \\ f_0 &= A_0. \end{aligned}$$

Calculons les dérivées successives de $f_m(a)$. On trouve facilement, en se servant des formules précédentes, que

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} f'_m &= f_{m-1} + af_{m-2} + \ldots \\ &\quad + a^{p-1}f_{m-p} + \ldots + a^{m-1}f_0, \end{aligned} \right.$$

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{f''_m}{1.2} &= C_1^1 f_{m-2} + C_1^2 af_{m-3} + \ldots \\ &\quad + C_1^{p-1} a^{p-2} f_{m-p} + \ldots + C_1^{m-1} a^{m-2} f_0, \end{aligned} \right.$$

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{f'''_m}{1.2.3} &= C_2^2 f_{m-3} + C_2^3 af_{m-4} + \ldots \\ &\quad + C_2^{p-1} a^{p-3} f_{m-p} + \ldots + C_2^{m-1} a^{m-3} f_0, \end{aligned} \right.$$

et l'on est ainsi amené à poser

$$(p)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{f_m^{(p)}}{1.2.3\ldots p} &= C_{p-1}^{p-1} f_{m-p} + C_{p-1}^{p} af_{m-p-1} + \ldots \\ &\quad + C_{p-1}^{m-2} a^{m-p-1} f_1 + C_{p-1}^{m-1} a^{m-p} f_0. \end{aligned} \right.$$

Je dis que cette loi est générale. Supposons-la vraie pour la $p^{\text{ième}}$ dérivée, et démontrons qu'elle est vraie pour la $(p+1)^{\text{ième}}$. En calculant cette dérivée, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{f_m^{(p+1)}}{1.2.3\ldots p} = {} & C_{p-1}^{p} f_{m-p-1} + 2C_{p-1}^{p+1} af_{m-p-2} + 3C_{p-1}^{p+2} a^2 f_{m-p-3} + \ldots + (m-p)C_{p-1}^{m-1} a^{m-p-1} f_0 \\ & + C_{p-1}^{p-1} f_{m-p-1} + C_{p-1}^{p-1} af_{m-p-2} + C_{p-1}^{p-1} a^2 f_{m-p-3} + \ldots + C_{p-1}^{p-1} a^{m-p-1} f_0 \\ & \qquad + C_{p-1}^{p} af_{m-p-2} + C_{p-1}^{p} a^2 f_{m-p-3} + \ldots \\ & \qquad\qquad + C_{p-1}^{p+1} a^2 f_{m-p-3} + \ldots \\ & \qquad\qquad\qquad + C_{p-1}^{m-2} a^{m-p-1} f_0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en faisant la somme,

$$\begin{aligned} \frac{f_m^{(p+1)}}{1.2.3\ldots p} = {} & C_p^{p+1} f_{m-p-1} + \left(2C_{p-1}^{p+1} + C_p^{p+1}\right) af_{m-p-2} \\ & + \left(3C_{p-1}^{p+2} + C_p^{p+2}\right) a^2 f_{m-p-3} + \ldots \\ & + \left[(m-p)C_{p-1}^{m-1} + C_p^{m-1}\right] a^{m-p-1} f_0, \end{aligned}$$

et, comme

$$2\,C_{p-1}^{p+1} = p\,C_p^{p+1},\quad 3\,C_{p-1}^{p+2} = p\,C_p^{p+2},\quad \ldots,\quad (m-p)\,C_{p-1}^{m-1} = p\,C^{m-1},$$

on a, en divisant par $(p+1)$,

$$(p+1)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{f_m^{(p+1)}}{1.2.3\ldots p(p+1)} &= C_p^p f_{m-p-1} + C_p^{p+1} a f_{m-p-2} + \ldots \\ &\quad + C_p^{m-1} a f_0, \end{aligned} \right.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(m-2)\quad \frac{f_m^{(m-2)}}{1.2.3\ldots(m-2)} = C_{m-3}^{m-3} f_2 + C_{m-3}^{m-2} a f_1 + C_{m-3}^{m-1} a^2 f_0,$$

$$(m-1)\quad \frac{f_m^{(m-1)}}{1.2.3\ldots(m-2)(m-1)} = C_{m-2}^{m-2} f_1 + C_{m-2}^{m-1} a f_0,$$

$$(m)\quad \frac{f_m^{(m)}}{1.2.3\ldots(m-1)m} = C_{m-1}^{m-1} f_0.$$

Sous ces formes, on voit que, si un nombre a rend positifs les termes de la suite $f_m, f_{m-1}, \ldots, f_1, f_0$, ce nombre rendra aussi positifs les termes de la suite de la fonction et de ses dérivées $f'_m, f''_m, \ldots, f_m^{(m)}$, c'est-à-dire que la limite supérieure des racines positives de l'équation $f(x) = 0$, limite fournie par la considération de la suite de M. Laguerre, s'appliquera à la suite de Newton.

Réciproquement, la limite donnée par la suite de Newton rend-elle positifs les termes de la suite des fonctions $f_m, f_{m-1}, \ldots, f_1, f_0$? En d'autres termes, les deux limites fournies par l'une et l'autre méthode sont-elles égales? Démontrons que, en général, il n'en est pas ainsi. Pour cela, calculons les fonctions $f_m, f_{m-1}, \ldots, f_{m-p}, f_1, f_0$ au moyen des formules établies plus haut. De la dernière on tire $f_0 = \dfrac{f_m^{(m)}}{1.2.3\ldots m}$. Nous désignerons, pour abréger, $\dfrac{f_m^{(m)}}{1.2\ldots m}$ par $f_m^{(m)}$, et en général $\dfrac{f_m^{(p)}}{1.2.3\ldots p}$ par $f_m^{(p)}$.

On trouve ainsi, en calculant de proche en proche,

$$f_0 = f_m^{(m)},$$
$$f_1 = f_m^{(m-1)} - C_{m-2}^{m-1} a f_m^{(m)},$$
$$f_2 = f_m^{(m-2)} - C_{m-3}^{m-2} a f_m^{(m-1)} + C_{m-3}^{m-1} a^2 f_m^{(m)},$$

et l'on démontre facilement que l'on a, en général,

$$f_{m-p} = f_m^{(p)} - C_{p-1}^{p} a f_m^{(p+1)} + C_{p-1}^{p+1} a^2 f_m^{(p+2)} - \ldots \pm C_{p-1}^{m-1} a^{m-p} f_m^{(m)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f_{m-2} = f''_m - C_1^2 a f'''_m + C_1^3 a^2 f^{\text{IV}}_m - \ldots \pm C_1^{m-1} a^{m-2} f_m^{(m)},$$
$$f_{m-1} = f'_m - C'_0 a f''_m + C_0^2 a^2 f'''_m - \ldots \mp C_0^{m-1} a^{m-1} f_m^{(m)},$$
$$f_m = A_0 a^m + A_1 a^{m-1} + \ldots + A_m.$$

Sous ces formes, on voit que, si le nombre a rend positives la fonction f_m et ses dérivées, il ne s'ensuit pas nécessairement que a rende positives les fonctions $f_0, f_1, \ldots, f_{m-p}, \ldots, f_{m-1}$. Par exemple, si nous prenons la deuxième de ces fonctions, f_1, qui est égale à $A_0 a + A_1$, par hypothèse, $f_m^{(m-1)} = \frac{m A_0 a + A_1}{1.2\ldots(m-1)}$ et $f_m^{(m)} = \frac{A_0}{1.2\ldots m}$ sont positives; il ne résulte pas nécessairement que $A_0 a + A_1$ soit positif.

Donc, en général, la limite supérieure des racines positives d'une équation fournie par la règle de Newton est plus petite que la limite fournie par la règle de M. Laguerre.