Nouvelles annales de mathématiques

Weill

Note sur le triangle inscrit et circonscrit à deux coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 253-261

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__253_1>

NOTE SUR LE TRIANGLE INSCRIT ET CIRCONSCRIT A DEUX CONIQUES;

PAR M. WEILL.

Considérons un quadrilatère ABDE [1] dont l'un des angles $\widehat{EDB}$ est droit, abaissons du point A la perpendi-

[1] Le lecteur est prié de faire la figure.

culaire AG sur le côté BD; soit C le point de concours des côtés opposés AE, BD; soit H le point de concours des hauteurs du triangle ABC.

Si nous considérons les cercles décrits sur les diagonales AD et BE comme diamètres, les points H et D appartiennent à l'axe radical de ces cercles, comme ayant chacun la même puissance par rapport aux deux cercles. Dès lors, la droite qui joint les milieux des diagonales est perpendiculaire sur DH en K. Soit L le milieu de la diagonale AD, et soit I le centre d'une conique inscrite dans le quadrilatère ABDE. Ce point I sera sur LK. On a alors

$$\overline{ID}^2 - \overline{IH}^2 = \overline{LD}^2 - \overline{LH}^2.$$

Or la différence $\left(\overline{LD}^2 - \overline{LH}^2\right)$ représente la puissance du point H par rapport au cercle décrit sur la diagonale AD comme diamètre. Mais cette puissance est la moitié de celle du même point H par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC; car, si l'on prolonge la hauteur AH jusqu'à sa rencontre en H_1 avec le cercle circonscrit au triangle ABC, on a $GH = GH_1$, par suite

$$HG.HA = \tfrac{1}{2} HH_1.HA.$$

Si donc on appelle R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, et δ la distance du point H au centre O de ce cercle, on aura

$$\overline{ID}^2 - \overline{IH}^2 = \frac{R^2 - \delta^2}{2}$$

ou

$$2(a^2 + b^2) - 2\overline{IH}^2 + \delta^2 - R^2 = 0. \tag{1}$$

La formule très simple que nous venons d'établir va nous conduire à de très nombreuses conséquences.

Théorème I. — *Si une conique est inscrite dans un* *triangle et que la somme des carrés de ses axes reste constante, son centre décrit une circonférence ayant pour centre le point de concours des hauteurs du triangle.*

La formule (1) donne immédiatement ce théorème, qui est dû à M. Mansion et qu'il a étendu à l'espace.

Théorème II. — *Si un triangle est circonscrit à une conique et si le point de concours des hauteurs de ce triangle a une puissance constante par rapport au cercle circonscrit, ce point décrit un cercle concentrique à la conique.*

Ce théorème, comme le précédent, n'est que la traduction de la formule (1).

Nous allons maintenant transformer cette formule et en déduire des théorèmes nouveaux.

Soit S le milieu de OH; ce point est le centre du cercle des neuf points du triangle ABC. On a la relation

$$2\overline{IO}^2 + 2\overline{IH}^2 = 4\overline{IS}^2 + \overline{OH}^2 = 4\overline{IS}^2 + \delta^2,$$

d'où

$$\delta^2 - 2\overline{IH}^2 = 2\overline{IO}^2 - 4\overline{IS}^2.$$

La formule (1) devient alors

$$(2) \qquad 2(a^2 + b^2) - R^2 + 2.\overline{IO}^2 - 4.\overline{IS}^2 = 0.$$

La formule (2) donne immédiatement les théorèmes suivants :

Théorème III. — *Quand un triangle se déplace en restant inscrit dans un cercle et circonscrit à une conique :*

1° *Le centre du cercle des neuf points de ce triangle décrit un cercle concentrique à la conique ; par suite,* *le cercle des neuf points est tangent à deux cercles fixes concentriques ;*

2° *Le point de concours des hauteurs du triangle décrit une circonférence ;*

3° *Le centre de gravité du triangle décrit une circonférence.*

Si l'on considère le triangle formé par les tangentes menées aux points A, B, C au cercle fixe circonscrit à ce triangle variable, on obtient un triangle qui se déplace en restant circonscrit à un cercle et inscrit dans une conique fixe. Le cercle des neuf points du triangle ABC se transforme par rayons vecteurs réciproques, le pôle de transformation étant en O, dans le cercle circonscrit au nouveau triangle, et l'on obtient le théorème suivant :

Théorème IV. — *Quand un triangle se déplace en restant inscrit à une conique fixe et circonscrit à un cercle fixe, le cercle circonscrit à ce triangle variable est tangent à deux cercles fixes.*

Supposons, en particulier, un triangle ($\lambda\mu\nu$) qui se déplace en restant inscrit dans une conique fixe et circonscrit à un cercle concentrique à cette conique ; soit (ABC) le triangle formé par les points de contact des côtés du premier ; les deux cercles concentriques qui forment l'enveloppe du cercle des neuf points du triangle ABC se transforment ici en deux cercles concentriques formant l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle ($\lambda\mu\nu$).

On a donc le théorème suivant :

Théorème V. — *Quand un triangle se déplace en restant inscrit à une conique et circonscrit à un cercle concentrique à la conique, le cercle circonscrit à ce triangle est de rayon constant.*

Ce théorème a été énoncé par Steiner.

Théorème VI. — *Quand un triangle se déplace en restant inscrit à un cercle O et circonscrit à un cercle de centre C, si l'on considère la conique ayant pour centre le point C et passant par les trois sommets du triangle, cette conique est de grandeur invariable et ses demi-axes sont les distances du point C à la circonférence O.*

Ce théorème est la traduction analytique du précédent.

Théorème VII. — *Quand un triangle se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques fixes quelconques, son centre de gravité décrit une conique homothétique à la conique dans laquelle le triangle reste inscrit.*

Ce théorème se déduit du théorème III par la projection cylindrique.

On peut le rapprocher du théorème analogue de Burnside, relatif au point de concours des hauteurs d'un triangle inscrit et circonscrit à deux coniques; mais notre théorème a des conséquences nombreuses.

Théorème VIII. — *Quand un hexagone se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques fixes, son centre de gravité décrit une conique.*

En effet, il suffit de remarquer que les diagonales de l'hexagone passent par un point fixe et que le triangle formé par les milieux de ces diagonales se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques fixes.

Théorème IX. — *Quand un polygone dont le nombre des côtés est 3.2^p se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques fixes, son centre de gravité décrit une conique.*

Ce théorème se déduit aisément du précédent.

Théorème X. — *Quand un triangle est circonscrit à une conique et inscrit dans un cercle concentrique, la somme des carrés de ses côtés est constante.*

En effet, le centre de gravité du triangle décrit une circonférence concentrique.

Théorème XI. — *Quand un triangle est inscrit dans un cercle et circonscrit à une conique ayant pour foyer le centre du cercle :*

1° *Le point de concours des hauteurs du triangle est au deuxième foyer de la conique;*

2° *Le cercle des neuf points du triangle coïncide avec le cercle principal de la conique relatif à l'axe focal et, par conséquent, reste fixe;*

3° *La somme des carrés des côtés du triangle reste constante.*

Ce théorème se démontre facilement à l'aide des formules que nous avons données.

Théorème XII. — *Lorsqu'un triangle se déplace en restant inscrit à une conique* A *et circonscrit à une conique* B, *si l'on fait passer une conique par deux points fixes* P *et* Q *de la conique* B *et par les trois sommets du triangle, cette conique variable aura pour enveloppes deux coniques fixes passant par les points* P *et* Q.

Ce théorème se déduit du théorème IV par la projection conique.

Théorème XIII. — *Lorsqu'un triangle se déplace en restant inscrit et circonscrit à deux coniques* A *et* B, *si l'on trace une conique tangente aux trois côtés du triangle et à deux tangentes fixes* P *et* Q *de la co-*

nique A, *cette conique variable aura pour enveloppes deux coniques fixes tangentes aux deux droites* P *et* Q.

Ce théorème se déduit du précédent par la méthode des polaires réciproques.

Si, en particulier, les deux tangentes fixes P et Q sont des droites focales, le théorème précédent prend une autre forme, et l'on a le théorème que nous allons énoncer.

THÉORÈME XIV. — *Lorsqu'un triangle est inscrit à une conique* A *et circonscrit à une conique* B, *si l'on considère la conique inscrite dans le triangle et ayant pour foyer l'un des foyers* F *de* A :

1° *Cette conique variable reste tangente à deux coniques fixes ayant* F *pour foyer;*

2° *Le deuxième foyer de cette conique décrit une conique.*

THÉORÈME XV. — *Lorsqu'un triangle est inscrit à une conique* A *et circonscrit à une conique* B, *si d'un foyer* F *de* A *on abaisse des perpendiculaires sur les côtés du triangle, le cercle qui passe par les pieds de ces perpendiculaires a pour enveloppes deux cercles fixes.*

Ce théorème se déduit facilement de celui qui précède.

THÉORÈME XVI. — *Lorsqu'une conique est inscrite dans un triangle, et que son axe focal passe par le centre du cercle circonscrit à ce triangle, le cercle principal correspondant à cet axe est tangent au cercle des neuf points du triangle.*

Ce théorème, dont la démonstration exige quelques développements, renferme, comme cas particulier, le théorème de Feuerbach, relatif au cercle des neuf points;

en effet, il suffit de supposer que la conique dont il s'agit dans notre théorème est l'un des cercles inscrits ou exinscrits au triangle.

Pour démontrer le théorème en question, nous donnerons une formule très facile à établir et qui est la suivante :

Si l'on considère une circonférence ayant son centre sur le grand axe d'une ellipse, à une distance d du centre de la courbe, et si cette circonférence de rayon R est circonscrite à un triangle circonscrit à l'ellipse, on a la relation suivante :

$$(R - a)^2 = b^2 + d^2. \tag{3}$$

Reprenons maintenant la formule (2), qui est

$$2(a^2 + b^2) - R^2 + 2d^2 - 4\overline{IS}^2 = 0.$$

Les formules (2) et (3) donnent

$$R^2 - 4aR + 4a^2 = 4\overline{IS}^2,$$

d'où

$$\frac{R}{2} - a = \pm IS.$$

Cette dernière formule démontre le théorème énoncé.

On peut remarquer que la formule (3) indique que le cercle circonscrit à un triangle circonscrit à une ellipse, et dont le centre est sur l'axe focal, touche les deux cercles passant par les deux foyers et ayant pour centres les extrémités du petit axe.

Le théorème que nous venons de démontrer est susceptible de diverses traductions intéressantes, et qu'il est facile de faire.

Nous terminerons cette Note par l'énoncé d'un dernier théorème qu'il est plus difficile de dégager des formules que nous avons établies, et dont la démonstration présente un certain intérêt.

THÉORÈME XVII. — *Si l'on considère une conique ayant* C *pour centre et* F *et* F′ *pour foyers, si* O *est le centre et* R *le rayon d'un cercle circonscrit à un triangle circonscrit lui-même à la conique, et si l'on désigne par* S *le centre du cercle des neuf points de ce triangle, on a la relation fort simple*

$$OF . OF' = 2R . CS.$$