Laguerre

Théorèmes généraux sur les équations algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 241-253

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__241_0>

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. LAGUERRE.

I.

1. Soient a et A les affixes de deux quantités imaginaires x et X liées entre elles par la relation linéaire

$$X = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

où α, β, γ et δ désignent des quantités imaginaires quelconques; il est aisé de voir que, quand le point a décrit un cercle (ou une droite), il en est de même du point A. Je m'appuierai fréquemment sur cette propriété très simple, qui se rattache immédiatement à la théorie bien connue de la transformation par rayons vecteurs réciproques.

2. Dans tout ce qui suit, la variable Y et les quantités analogues y, η, ... sont égales à l'unité et uniquement introduites pour l'homogénéité des formules; je les remplacerai même souvent par l'unité lorsqu'il n'y aura lieu de craindre aucune confusion.

Cela posé, soit l'équation

$$f(X, Y) = 0, \tag{1}$$

où $f(X, Y)$ est un polynôme homogène et du degré n par rapport à X et Y. Désignons par a l'affixe d'une quantité imaginaire quelconque x et par α l'affixe de la quantité ξ qui est déterminée par l'équation

$$\xi f'_x + \eta f'_y = 0. \tag{2}$$

On peut énoncer la proposition suivante :

Tout cercle passant par les points a et α renferme au moins une racine de l'équation (1); *il y a aussi au moins une racine à l'extérieur de ce cercle.*

Exceptionnellement, toutes les racines peuvent se trouver sur la circonférence du cercle; si cette circonférence, du reste, passe par $(n-1)$ *des racines, elle passe nécessairement par la* $n^{\text{ième}}$ *racine.*

Pour démontrer cette proposition, je remarquerai que, la relation (2) qui lie entre elles les quantités ξ et x étant projective, il suffit de l'établir pour une position particulière du cercle et des points a et α.

Je supposerai donc que le cercle se réduit à l'axe des abscisses et que l'on a $x = \infty$ et $\xi = 0$; la relation (2) se réduit alors à

$$b = 0,$$

et, comme b est la somme algébrique des racines, on voit que, si toutes les racines ne sont pas réelles (c'est-à-dire si elles ne sont pas toutes situées sur l'axe des abscisses), l'une au moins doit être située au-dessus de cet axe, tandis qu'une autre est située au-dessous.

La proposition est donc complètement démontrée.

3. Plus généralement, considérons les divers émanants

$$\xi f'_x + \eta f'_y, \quad \xi^2 f''_{x^2} + 2\xi\eta f''_{xy} + \eta^2 f''_{y^2},$$
$$\xi^3 f'''_{x^3} + 3\xi^2\eta f'''_{x^2y} + 3\eta\xi^2 f'''_{xy^2} + \eta^3 f'''_{y^3}, \quad \ldots$$

du polynôme f.

Soient Θ l'un quelconque de ces émanants, ξ et x deux quantités quelconques liées par la relation

$$(3) \qquad \Theta = 0;$$

on a le théorème suivant :

Tout cercle passant par les points x et ξ renferme au moins une racine de l'équation (1); *il y a aussi au moins une racine à l'extérieur de ce cercle.*

Pour le démontrer, je remarquerai que, Θ étant un covariant de f, il suffit de l'établir pour une position particulière du cercle et des valeurs particulières de x et de ξ. Je supposerai, comme précédemment, que le cercle se réduit à l'axe des abscisses et que l'on a $x = \infty$ et $\xi = 0$.

En considérant par exemple, pour plus de simplicité, l'émanant du troisième ordre, et en posant

$$f = ax^n + nbx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}cx^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}dx^{n-3} + \ldots,$$

la relation (3) devient

$$a\xi^3 + 3b\xi^2 + 3c\xi + d = 0,$$

d'où l'on déduit $d = 0$; et de là résulte immédiatement que, si l'équation proposée n'a pas toutes ses racines réelles, il y a au moins une racine imaginaire dans laquelle le coefficient de i est positif et au moins une dans laquelle il est négatif, ce qui constitue précisément le théorème que je veux démontrer.

En supposant en effet que, dans toutes les racines imaginaires de l'équation (1), les coefficients de i eussent le même signe, et en posant, pour abréger,

$$f = F + i\Phi,$$

il résulterait d'une remarque importante faite par

M. Hermite et M. Biehler que l'équation $pF + q\Phi = 0$ aurait toutes ses racines réelles, quels que fussent les nombres réels p et q.

Faisons, ce que l'on a toujours le droit de faire, $a = 1$, et, mettant en évidence la partie réelle des autres coefficients, posons

$$b = \beta + \beta' i, \quad c = \gamma + \gamma' i, \quad e = \varepsilon + \varepsilon' i, \quad \ldots;$$

il vient, en remarquant que d est nul,

$$\begin{aligned} pF + q\Phi = p x^n &+ n(p\beta + q\beta')x^{n-1} \\ &+ \frac{n(n-1)}{1.2}(p\gamma + q\gamma')x^{n-2} \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(p\varepsilon + q\varepsilon')x^{n-4} + \ldots. \end{aligned}$$

Or on peut toujours trouver deux nombres p et q qui ne soient pas nuls en même temps et tels que l'on ait

$$p\gamma + q\gamma' = 0;$$

mais alors l'équation manquerait des deux termes consécutifs en x^{n-2} et x^{n-3}; ce qui est impossible, puisqu'elle a toutes ses racines réelles.

Ce raisonnement serait en défaut si les coefficients de x^n et x^{n-1} s'annulaient en même temps; mais on aurait dans ce cas $\beta' = 0$, et cela ne peut avoir lieu, puisque β' est la somme de quantités ayant toutes le même signe.

La proposition est donc entièrement établie; je ferai encore observer, comme précédemment, que, dans certains cas particuliers, toutes les racines peuvent se trouver sur la circonférence du cercle.

4. On déduit du théorème précédent une conséquence importante.

Soit K un cercle (ou une droite) quelconque tracé dans le plan; il le divise en deux régions distinctes. Supposons qu'une de ces régions renferme toutes les racines de l'équation (1) et que le point x soit situé dans l'autre région; je dis que toutes les racines de l'équation $\Theta = 0$ sont situées dans la région limitée par le cercle et qui renferme toutes les racines de l'équation (1).

En effet, si l'une des valeurs de ξ satisfaisant à l'équation $\Theta = 0$ était située dans la même région que le point x, par les deux points x et ξ on pourrait faire passer un cercle tangent à K; la portion du plan limitée par ce cercle et ne renfermant pas K devrait renfermer au moins une racine de l'équation (1), ce qui est impossible, puisque toutes les racines de cette équation sont comprises dans la région qui ne renferme pas le point x.

II.

5. Il résulte de la proposition précédente que, si l'équation (1) a toutes ses racines réelles, l'équation $\Theta = 0$ (où l'on considère l'une des variables x et ξ comme inconnue, tandis qu'on attribue à l'autre une valeur réelle arbitraire) a toutes ses racines réelles.

En particulier, l'équation

$$\xi^2 f''_{x^2} + 2\xi f''_{xy} + f''_{y^2} = 0$$

a toutes ses racines réelles, quelle que soit la valeur réelle attribuée à x, et de là résulte immédiatement cette proposition importante que j'ai eu plusieurs fois occasion d'employer :

Si l'équation $f = 0$ a toutes ses racines réelles, le hessien du polynôme f

$$f''^2_{xy} - f''_{x^2} f''_{y^2}$$

a toujours une valeur positive ou nulle.

6. On voit aussi que, si l'équation (1) a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation $\xi f'_x + f'_y = 0$.

Réciproquement, si, quelle que soit la valeur réelle attribuée à ξ, cette dernière équation a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation (1).

Pour établir cette proposition, je remarquerai d'abord qu'en posant $F = \xi f'_x + f'_y$, l'équation $F = 0$ ayant par hypothèse toutes ses racines réelles, l'expression $F''^2_{xy} - F''_{x^2} F''_{y^2}$ a toujours une valeur positive, quelle que soit la valeur de ξ.

Or on a

$$
\begin{aligned}
F''_{x^2} &= \xi f'''_{x^3} + f'''_{x^2y},\\
F''_{xy} &= \xi f'''_{x^2y} + f'''_{xy^2},\\
F''_{y^2} &= \xi f'''_{xy^2} + f'''_{y^3},
\end{aligned}
$$

et, quand on fait $\xi = x$, ces expressions ont des valeurs respectivement proportionnelles à f''_{x^2}, f''_{xy} et f''_{y^2} [1], d'où il résulte que $f''^2_{xy} - f''_{x^2} f''_{y^2}$ a toujours également une valeur positive.

Cela posé, étudions comment varient les racines de l'équation $F = 0$ quand ξ varie depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

En désignant par ξ' la dérivée de ξ par rapport à x, on a

$$\xi' f'_x + \xi f''_{x^2} + f''_{xy} = 0,$$

puis, en vertu de la relation $\xi f'_x + f'_y = 0$,

$$\xi' f'^2_x = f'_y f''_{x^2} - f'_x f''_{xy} = (n-1)\left(f''_{x^2} f''_{y^2} - f''^2_{xy}\right);$$

or, de là résulte que ξ' est toujours négatif.

Ainsi, quand ξ croît de $-\infty$ à $+\infty$, les diverses racines de l'équation $F = 0$ vont toujours en décroissant.

---

[1] Ceci suppose évidemment $n > 2$.

Elles ont toujours d'ailleurs des valeurs distinctes (si l'on suppose, ce que l'on peut toujours faire, que l'équation $f = o$ n'a pas de racines égales); car, si, pour deux valeurs différentes de ξ, l'équation $F = o$ était satisfaite par la même valeur de x, on aurait à la fois

$$\xi f'_x + f'_y = o$$

et

$$\xi' f'_x + f'_y = o,$$

ce qui exigerait que l'on eût en même temps $f'_x = o$ et $f'_y = o$; or cela est impossible, puisque l'équation $f = o$ n'a pas de racines égales.

Pour fixer les idées, supposons $n = 4$, et soient, pour $\xi = -\infty$, α, β et γ les racines de l'équation $F = o$: quand ξ varie de $-\infty$ à $+\infty$, la racine de l'équation $F = o$ dont la valeur initiale est α va constamment en décroissant, passe de $-\infty$ à $+\infty$ et acquiert finalement la valeur γ; la racine dont la valeur initiale est β va constamment en décroissant et acquiert finalement la valeur α. De même, la troisième racine décroît constamment depuis γ jusqu'à β.

La variable ξ croissant constamment depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, il y a nécessairement un instant où elle a la même valeur que la troisième racine; à ce moment, ξ étant égal à x, on a

$$\xi f'_x + f'_y = x f'_x + f'_y = nf = o;$$

d'où il suit que cette valeur de ξ est une racine de l'équation (1).

L'équation (1) a ainsi une racine comprise entre γ et β; on prouverait de même qu'elle en a une comprise entre β et α, une autre entre α et $-\infty$ et une dernière entre $+\infty$ et γ; elle a donc toutes ses racines réelles.

7. Comme application, je considérerai l'équation

$$x^3 + px + q = o.$$

Pour que cette équation ait toutes ses racines réelles, il faut et il suffit, d'après ce qui précède, que l'équation

$$\xi(3x^2 + p) + 2px + 3q = 0$$

ait toutes ses racines réelles, quelle que soit la valeur de ξ.

De là résulte que

$$p^2 - 3p\xi^2 - 9q\xi$$

doit toujours être positif; ce qui exige que $4p^3 + 27q^2$ et p soient négatifs. On retrouve ainsi l'équation de condition bien connue

$$4p^3 + 27q^2 < 0.$$

III.

8. La propriété du hessien d'un polynôme f décomposable en facteurs réels du premier degré et que j'ai mentionnée plus haut, à savoir qu'il a une valeur constamment positive, est un cas particulier de la proposition suivante, qui a d'utiles applications :

Si le polynôme f est décomposable en facteurs réels du premier degré et si l'on attribue à la variable x une valeur imaginaire quelconque $\alpha + \beta i$, le coefficient de i dans toutes les racines de l'équation $\Theta = 0$ est de signe contraire *à celui de* β.

Cette proposition est un corollaire immédiat d'un théorème général que j'ai démontré plus haut (n° 4).

En particulier, si l'on fait $x = \alpha + \beta i$ dans l'expression

$$x - \frac{nf}{f'},$$

le coefficient de i dans le résultat de la substitution est de signe contraire à celui de β.

Il en est de même des diverses expressions

$$x - \frac{(n-1)f'}{f''}, \quad x - \frac{(n-2)f''}{f'''}, \quad \ldots,$$

puisque, quand l'équation $f = 0$ a toutes ses racines réelles, les équations $f' = 0$, $f'' = 0$, ... [1] jouissent de la même propriété.

9. Comme application, en désignant par f un polynôme décomposable en facteurs réels inégaux du premier degré et par a et b deux constantes réelles arbitraires, je considérerai l'équation

$$\frac{f'}{f} + \frac{x-a}{b} = 0. \tag{4}$$

En substituant successivement dans le premier membre de cette équation $-\infty$, puis les racines de l'équation $f = 0$ et enfin $+\infty$, on constate aisément qu'elle a toutes ses racines réelles si b est < 0 et qu'elle a au plus deux racines imaginaires si b est > 0.

Dans ce dernier cas, désignons par $\alpha + \beta i$ une de ces racines; il résulte de ce qui précède que, si l'on remplace x par cette valeur dans l'expression

$$x - \frac{nf}{f'},$$

le coefficient de i dans le résultat de la substitution doit être de signe contraire à β.

---

[1] Ici, ainsi que dans tout ce qui suit, je désigne par f', f'', f''', ... les dérivées de f prises par rapport à la variable x.

Or, en vertu de l'équation (4), elle se réduit à

$$x - \frac{nb}{x-a}$$

et, en faisant $x = \alpha + \beta i$, à

$$\alpha + \beta i - \frac{nb}{a - \alpha - \beta i},$$

où le coefficient de i est

$$\beta\left[1 - \frac{nb}{(a-\alpha)^2 + \beta^2}\right].$$

Ayant donc $1 - \frac{nb}{(a-\alpha)^2+\beta^2} < 0$, on en déduit tout d'abord, comme je l'avais trouvé directement, que l'équation (4) ne peut avoir de racine imaginaire que si b est > 0.

On voit en second lieu que, *si b est > 0, et si l'équation a deux racines imaginaires, elles sont renfermées dans l'intérieur du cercle dont l'équation est*

$$(X - a)^2 + Y^2 = nb.$$

Il est remarquable que la position de ce cercle ne dépende pas de la valeur des racines de l'équation $f = 0$.

10. Considérons une équation $f = 0$ à coefficients réels ou imaginaires; soient $p, p', p'', \ldots$ les coefficients de i dans ses racines et β un nombre quelconque égal ou supérieur au plus grand de ces coefficients. Traçons dans le plan la droite parallèle à l'axe des abscisses et dont l'ordonnée a pour valeur β; on voit que toutes les racines de l'équation $f = 0$ sont situées au-dessous de cette droite, et, en vertu d'une proposition énoncée ci-dessus, il en est de même des racines des équations

$$f = 0, \quad f'' = 0, \quad f''' = 0, \quad \ldots.$$

On en conclut que, si dans les expressions

$$x - \frac{nf}{f'}, \quad x - \frac{(n-1)f'}{f''}, \quad x - \frac{(n-2)f''}{f'''}, \quad \ldots$$

on remplace x par la quantité $\alpha + \beta i$, où α désigne un nombre réel arbitraire et β le nombre défini ci-dessus, le coefficient de i dans les résultats obtenus est inférieur à β.

Soient $F = 0$ une équation quelconque de degré n et $\alpha + \beta i$ celle de ses racines pour laquelle le coefficient de i a la plus grande valeur; en posant, pour abréger,

$$\frac{F}{x - \alpha - \beta i} = f,$$

on voit que, dans les expressions

$$\alpha + \beta i - \frac{(n-1)f(\alpha + \beta i)}{f'(\alpha + \beta i)},$$
$$\alpha + \beta i - \frac{(n-2)f'(\alpha + \beta i)}{f''(\alpha + \beta i)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

le coefficient de i est plus petit que β.

On trouve aisément d'ailleurs

$$f(\alpha + \beta i) = F'(\alpha + \beta i),$$
$$f'(\alpha + \beta i) = \frac{F''}{2}(\alpha + \beta i),$$
$$f''(\alpha + \beta i) = \frac{F'''}{3}(\alpha + \beta i),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où la conclusion suivante :

Étant donnée l'équation du degré n

$$F = 0,$$

désignons par $\alpha + \beta i$ celle de ses racines pour laquelle le coefficient de i a la plus grande valeur; cela posé, *les coefficients de i dans les expressions*

$$\frac{F'(\alpha+\beta i)}{F''(\alpha+\beta i)}, \quad \frac{F''(\alpha+\beta i)}{F'''(\alpha+\beta i)}, \quad \ldots$$

sont tous positifs.

11. Comme application, je me propose de montrer que le polynôme du degré n, étudié par M. Hermite et qui satisfait à l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(5) \qquad f'' - xf' + nf = 0,$$

a toutes ses racines réelles.

Cette proposition bien connue peut s'établir par les considérations les plus élémentaires; je crois néanmoins, dans cette question importante de la détermination de la nature des racines d'une équation, qu'il est utile d'étudier toutes les méthodes qui peuvent conduire au résultat.

Supposons donc que l'équation $f = 0$ ait des racines imaginaires, et soit $\alpha + \beta i$ celle d'entre elles pour laquelle le coefficient de i est le plus grand. Je remarquerai tout d'abord que, l'équation ayant ses coefficients réels, les racines sont conjuguées deux à deux; par suite, β a une valeur positive.

J'observe ensuite que l'expression

$$\frac{f'(\alpha+\beta i)}{f''(\alpha+\beta i)}$$

se réduit à

$$\frac{1}{\alpha+\beta i},$$

en vertu de l'équation différentielle (5).

Or, le coefficient de i dans cette expression est le nombre essentiellement négatif $\frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2}$, ce qui, d'après la proposition énoncée plus haut, est impossible. L'équation a donc toutes ses racines réelles.

La même démonstration s'applique au polynôme de Legendre qui satisfait à l'équation différentielle

$$(x^2-1)f''+2xf'-n(n+1)f=0.$$

En conservant les mêmes notations que ci-dessus, on voit encore que, en vertu de cette équation différentielle, l'expression

$$\frac{f'(\alpha+\beta i)}{f''(\alpha+\beta i)}$$

se réduit à

$$\frac{1-(\alpha+\beta i)^2}{2(\alpha+\beta i)},$$

où le coefficient de i a le signe de l'expression

$$-\beta(1+\alpha^2+\beta^2),$$

et, cette quantité étant essentiellement négative, il en résulte que les polynômes de Legendre ont toutes leurs racines réelles.