NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LAGUERRE

Sur quelques propriétés des équations algébriques qui ont toutes leurs racines réelles

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 224-236

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__224_1>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES QUI ONT TOUTES LEURS RACINES RÉELLES;

Par M. LAGUERRE.

1. Je considérerai d'abord l'équation qui détermine $\tang\frac{\alpha}{n}$ quand on connaît $\tang\alpha$.

On a, d'après la formule de Moivre,

$$\left(\cos\frac{\alpha}{n}+i\sin\frac{\alpha}{n}\right)^n=\cos\alpha+i\sin\alpha$$

et

$$\left(\cos\frac{\alpha}{n}-i\sin\frac{\alpha}{n}\right)^n=\cos\alpha-i\sin\alpha;$$

on en déduit

$$\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{n}+i\sin\frac{\alpha}{n}}{\cos\frac{\alpha}{n}-i\sin\frac{\alpha}{n}}\right)^n=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\alpha-i\sin\alpha},$$

ou, en posant $\tang \frac{\alpha}{n} = x$,

$$(1)\qquad \left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = \frac{1+i\tang\alpha}{1-i\tang\alpha}.$$

On voit immédiatement que cette équation ne peut avoir des racines égales; pour démontrer que toutes ses racines sont réelles, je remarquerai que, pour chacune d'elles, on a

$$\operatorname{mod}(1+ix) = \operatorname{mod}(1-ix),$$

et de cette identité l'on déduit aisément la réalité de x.

Supposons, en effet, que x puisse avoir la valeur imaginaire $\alpha+\beta i$; on aurait

$$\operatorname{mod}(1-\beta+\alpha i) = \operatorname{mod}(1+\beta-\alpha i)$$

ou bien

$$(1-\beta)^2+\alpha^2 = (1+\beta)^2+\alpha^2,$$

ce qui est évidemment impossible si β est différent de zéro.

L'équation (1) a donc toutes ses racines réelles et inégales [1].

2. Les mêmes considérations permettent de démontrer une importante proposition, due à M. Hermite [2] et que l'on peut énoncer de la façon suivante :

---

[1] *Voir* à ce sujet une Note de M. Biehler : *Sur une application de la méthode de Sturm* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XIX, p. 76). Voir également une Note du même auteur publiée dans le dernier numéro et dont je n'ai eu connaissance qu'après la composition de mon article.

[2] *Sur l'indice des fractions rationnelles* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. VII, p. 131).

M. Biehler est arrivé en même temps au même théorème, qu'il a démontré dans une Note *Sur une classe d'équations algébriques dont toutes les racines sont réelles*, insérée au *Journal de M. Borchardt*, t. 87, p. 350.

Soient $\alpha + \beta i$, $\gamma + \delta i$, ..., $\lambda + \mu i$ *des quantités imaginaires, dans lesquelles les coefficients de i ont tous le même signe; si l'on pose, pour abréger,*

$$\begin{aligned}\Pi(x - \alpha - \beta i) &= (x - \alpha - \beta i)(x - \gamma - \delta i)\ldots(x - \lambda - \mu i)\\ &= \mathrm{F}(x) + i\Phi(x),\end{aligned}$$

l'équation

$$p\,\mathrm{F}(x) + q\,\Phi(x) = 0,$$

où p et q désignent des nombres réels arbitraires, a toutes ses racines réelles.

Cette équation peut se mettre sous la forme suivante

$$(p - iq)\,\Pi(x - \alpha - \beta i) + (p + iq)\,\Pi(x - \alpha + \beta i) = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(2)\qquad \operatorname{mod}\Pi(x - \alpha - \beta i) = \operatorname{mod}\Pi(x - \alpha + \beta i),$$

et il est aisé d'en conclure que x est nécessairement réel.

Ayant, en effet, tracé dans un plan deux axes rectangulaires OX et OY, je représente, suivant l'usage ordinaire, la quantité imaginaire $\mathrm{X} + \mathrm{Y}i$ par le point dont les coordonnées sont X et Y. Soient A, C, ..., L les points qui représentent les quantités $\alpha + \beta i$, $\gamma + \delta i$, ..., $\lambda + \mu i$; les nombres β, δ, ..., μ ayant tous le même signe, ces points sont tous situés d'un même côté de l'axe OX, au-dessus de cet axe par exemple; quant aux points A′, C′, ..., L′, qui représentent les quantités conjuguées $\alpha - \beta i$, $\gamma - \delta i$, ..., $\lambda - \mu i$, comme ils sont symétriques des premiers relativement à l'axe OX, ils sont situés au-dessous de cette droite.

Cela posé, en désignant par P le point représentatif de x, l'égalité (2) peut s'écrire ainsi qu'il suit:

$$\mathrm{PA}.\mathrm{PC}\ldots\mathrm{PL} = \mathrm{PA}'.\mathrm{PC}'\ldots\mathrm{PL}'.$$

Or, si x était imaginaire, le point P serait situé en dehors de l'axe OX, au-dessus de cette droite par exemple, et l'on aurait

$$PA < PA', \quad PB < PB', \quad \ldots, \quad PL < PL',$$

inégalités incompatibles avec la relation précédente.

La quantité x est donc nécessairement réelle et la proposition est entièrement démontrée.

3. Parmi les conséquences que l'on peut en déduire, je mentionnerai la suivante, à cause de sa simplicité.

Soit $f(x) = 0$ une équation algébrique ayant toutes ses racines réelles ; en désignant par ω, p et q des quantités réelles quelconques, si l'on pose, pour abréger,

$$f(x + \omega i) = F(x) + i\,\Phi(x),$$

l'équation

$$p\,F(x) + q\,\Phi(x) = 0$$

a également toutes ses racines réelles.

II.

4. Quand, une équation algébrique étant ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable, la suite des termes présente des lacunes, on peut, comme on le sait, en déduire aisément une limite supérieure du nombre des racines réelles de l'équation.

Cette conséquence immédiate de la règle des signes de Descartes a de nombreuses applications ; en voici quelques-unes très simples qui présentent quelque intérêt.

Soit $f(x) = 0$ une équation algébrique du degré n et ayant toutes ses racines réelles ; développons $\frac{1}{f(x)}$ suivant les puissances croissantes de x. Soient $F(x)$ la série que l'on obtient ainsi et $\Phi(x)$ l'ensemble des termes de cette série dont le degré ne dépasse pas m.

Par définition, le polynôme $\Phi(x)$ du degré m est tel que le développement de la différence $\frac{1}{f(x)} - \Phi(x)$, suivant les puissances croissantes de x, commence par un terme d'un ordre supérieur à m; on en déduit facilement l'égalité suivante

$$1 = f(x)\,\Phi(x) + x^p\mathrm{P},$$

où P désigne un polynôme et p un nombre entier supérieur à m, d'où encore

$$f(x)\,\Phi(x) = 1 - x^p\mathrm{P}.$$

Considérons maintenant l'équation

$$f(x)\,\Phi(r) = 0,$$

que l'on peut écrire

$$1 - x^p\mathrm{P} = 0.$$

Cette équation présentant une lacune de $(p-1)$ termes entre le premier et le second terme, le nombre de ses racines imaginaires est au moins égal à $(p-2)$, et par conséquent au moins égal à $(m-1)$, puisque p est plus grand que m. Ces racines appartiennent toutes aux deux équations $f(x) = 0$ et $\Phi(x) = 0$; la première a d'ailleurs toutes ses racines réelles et la seconde est du degré m, d'où il suit que, ayant au moins $(m-1)$ racines imaginaires, elle ne peut avoir qu'une seule racine réelle, ce qui aura lieu si elle est de degré impair.

Les considérations qui précèdent s'appliquent au développement de l'expression $\frac{1}{\sqrt[q]{f(x)}}$, où q désigne un nombre entier quelconque et $f(x)$ un polynôme décomposable en facteurs réels du premier degré.

Désignons par $\Phi(x)$ l'ensemble des termes de ce développement dont le degré ne dépasse pas m; le premier terme de la série

$$\frac{1}{\sqrt[q]{f(x)}} - \Phi(x)$$

étant d'un ordre supérieur à m, on en conclut aisément l'égalité

$$1 = f(x)\,\Phi^q(x) + x^p\mathrm{P},$$

où P désigne un polynôme et p un nombre entier supérieur à m.

Cette égalité peut s'écrire

$$1 - x^p\mathrm{P} = f(x)\,\Phi^q(x),$$

et l'on en conclut, comme précédemment, que l'équation

$$f(x)\,\Phi^q(x) = 0$$

a au moins $(m-1)$ racines imaginaires; ces racines ne pouvant appartenir qu'à l'équation $\Phi(x) = 0$, celle-ci, qui est du degré m, a au plus une racine réelle.

J'aurais pu considérer l'expression $\frac{1}{[f(x)]^{\frac{r}{q}}}$, où r et q désignent deux nombres entiers quelconques, puisque, si $f(x)$ est décomposable en facteurs réels du premier degré, il en est de même de $f^r(x)$, et de là, en passant au cas où la fraction $\frac{r}{q}$ tend vers un nombre incommensurable quelconque, je pourrai énoncer la proposition suivante :

En désignant par ω *une quantité* positive *quelconque* (commensurable ou incommensurable), *si l'on développe* $\frac{1}{f^\omega(x)}$ *suivant les puissances croissantes de* x *et si l'on désigne par* $\Phi(x)$ *l'ensemble des termes de ce développement dont le degré ne dépasse pas* m, *quel que soit le nombre* m, *l'équation* $\Phi(x) = 0$ *a au plus une racine réelle.*

5. Comme application, je poserai

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{p}\right)^p;$$

on voit, par ce qui précède, qu'en désignant par $\Phi(x)$ l'ensemble des termes du degré m dans le développement de $\left(1 - \frac{x}{p}\right)^{-p}$, l'équation $\Phi(x) = 0$ a au plus une racine réelle, quel que soit le nombre positif p. Si, maintenant, on fait croître indéfiniment p, l'expression $\left(1 - \frac{x}{p}\right)^{-p}$ a pour limite e^x.

D'où la proposition suivante :

Si l'on égale à zéro l'ensemble des m premiers termes de la série suivant laquelle se développe e^x, l'équation ainsi obtenue a au plus une racine réelle.

Cette proposition peut, du reste, se démontrer très aisément en s'appuyant sur le théorème de Rolle (*voir* notamment le *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* de M. Hermite, année 1867-1868); mais il résulte, en outre, du théorème démontré plus haut, que, si $f(x)$ est un polynôme décomposable en facteurs réels du premier degré, le développement de l'expression

$$\frac{e^x}{f^{\omega}(x)}$$

jouit de la même propriété, quel que soit le nombre positif ω.

6. Les considérations qui précèdent s'appliquent entièrement à un cas plus général et plus important; mais, avant de l'aborder, je crois devoir rappeler quelques définitions.

En désignant par $V(x)$ un polynôme entier en x ou une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x, et par $\frac{\Phi(x)}{F(x)}$ une fraction rationnelle dont le dénominateur est du degré n et le numérateur du degré m, on dit que cette fraction est une réduite de $V(x)$ si le développement en série de la différence

$$V(x) - \frac{\Phi(x)}{F(x)}$$

commence par un terme de l'ordre de x^{m+n+1}.

Il est facile d'obtenir ces réduites; multiplions, en effet, $V(x)$ par un polynôme $F(x)$ du degré n et renfermant, par suite, $(n+1)$ indéterminées. En développant le produit ainsi obtenu, nous obtiendrons d'abord un polynôme du degré m, $\Phi(x)$, puis une série de termes contenant x^m en facteurs et nous pourrons disposer des $(n+1)$ coefficients indéterminés de façon à annuler, dans le développement, les coefficients de x^{m+1}, $x^{m+2}, \ldots, x^{m+n}$; il suffira en effet, pour cela, de trouver des valeurs de $(n+1)$ inconnues satisfaisant à n équations linéaires sans second membre, et l'on sait qu'un pareil système d'équations admet toujours au moins une solution dans laquelle les inconnues ne sont pas toutes nulles en même temps. Les polynômes $F(x)$ et $\Phi(x)$ étant déterminés comme je viens de le dire, il est clair que la fraction $\frac{\Phi(x)}{F(x)}$ est une réduite de $F(x)$.

Cela posé, $f(x)$ désignant un polynôme décomposable en facteurs réels du premier degré, soit $\frac{\Phi(x)}{F(x)}$ une réduite de $f(x)$, en sorte que, $\Phi(x)$ étant du degré m et $F(x)$ du degré n, le développement de

$$f(x) - \frac{\Phi(x)}{F(x)}$$

commence par un terme de l'ordre $(m+n+1)$.

On aura évidemment, en désignant par P un polynôme entier,

$$F(x)f(x) - \Phi(x) = x^{m+n+1}P,$$

d'où

$$\Phi(x) + x^{m+n+1}P = F(x)f(x).$$

Or, le terme du degré le plus élevé dans $\Phi(x)$ étant du degré m, on voit que l'équation

$$\Phi(x) + x^{m+n+1}P = 0$$

a au moins $(n-1)$ racines imaginaires, et, comme ces racines appartiennent à l'équation $F(x)f(x) = 0$ et que $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, on en conclut que l'équation $F(x) = 0$, qui est du degré n, a au plus une racine réelle.

On obtiendrait un résultat analogue en considérant les réduites $\frac{\Phi(x)}{F(x)}$ du développement de la fraction $\frac{1}{f(x)}$, et l'on établirait facilement que l'équation $\Phi(x) = 0$ a au plus une racine réelle.

En particulier, posons d'abord, en désignant par p un nombre entier arbitraire,

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{p}\right)^p.$$

Si nous faisons croître indéfiniment le nombre entier m, nous en conclurons que les dénominateurs des réduites de e^x ont au plus un facteur réel du premier degré; nous voyons, en outre, que la même proposition a lieu à l'égard des réduites de l'expression $e^x\varphi(x)$, où $\varphi(x)$ désigne un polynôme décomposable en facteurs réels du premier degré.

Semblablement, en posant

$$f(x) = \left(1 - \frac{x}{p}\right)^p$$

et en faisant croître indéfiniment le nombre entier p, nous voyons que les numérateurs des réduites de e^x ont au plus un facteur réel du premier degré, et la même proposition a lieu à l'égard des numérateurs des réduites de l'expression $\frac{e^x}{\varphi(x)}$, où $\varphi(x)$ désigne, comme ci-dessus, un polynôme quelconque décomposable en facteurs réels du premier degré.

7. Comme je viens de le montrer, si l'on considère une réduite quelconque $\frac{\Phi(x)}{F(x)}$ de la transcendante e^x, les équations $\Phi(x) = 0$ et $F(x) = 0$ ont au plus une racine réelle.

Il ne sera peut-être pas inutile de montrer comment on peut facilement former les polynômes $F(x)$ et $\Phi(x)$.

A cet effet, je considérerai l'expression $F(x)e^{zx}$ et poserai

$$F(x)\, e^{zx} = \Sigma A_p x^p.$$

Le polynôme $F(x)$ étant du degré n, je remarque tout d'abord que A_{m+n}, qui est du degré $(m+n)$, est divisible par z^n. En dérivant par rapport à z l'équation précédente, on a d'ailleurs

$$F(x)e^{zx} = \Sigma A'_p x^{p-1},$$

d'où

$$\Sigma A_p x^p = \Sigma A'_p x^{p-1};$$

et l'on en conclut que chacun des coefficients A_p est la dérivée par rapport à z du coefficient qui le suit dans la série.

Je remarque maintenant que, $F(x)$ étant le dénominateur d'une réduite de e^x, le développement de $F(x)\,e^x$ manque des termes en $x^{m+1}, x^{m+2}, \ldots, x^{m+n}$; tous les coefficients

$$A_{m+1},\ A_{m+2},\ \ldots,\ A_{m+n}$$

s'annulent donc quand on y fait $z=1$. Par suite, A_{m+n}, ainsi que ses $(n-1)$ premières dérivées, s'annule dans la même hypothèse; A_{m+n} est donc divisible par $(z-1)^n$. J'ai montré plus haut que ce coefficient était du degré $(m+n)$ par rapport à la lettre z et qu'il était divisible par z^m; il est donc égal, à un facteur numérique près (que l'on peut prendre arbitrairement), à $z^m(z-1)^n$.

Ainsi, une propriété caractéristique du polynôme $F(x)$ est que, dans le développement de $F(x)\,e^{zx}$ suivant les puissances croissantes de x, le coefficient de x^{m+n} est (sauf un facteur numérique) $z^m(z-1)^n$.

En supposant donc ce facteur égal à $\dfrac{1}{1.2.3\ldots(m+n)}$ et en posant

$$F(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots,$$

on obtiendra facilement l'égalité

$$a_0z^{m+n}+a_1(m+n)z^{m+n-1}+a_2(m+n)(m+n-1)z^{m+n-2}+\ldots$$
$$=z^{m+n}-nz^{m+n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}z^{m+n-2}-\ldots,$$

d'où l'on déduit

$$a_0=1,\quad a_1=-\frac{n}{m+n},\quad a_2=\frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{1}{(m+n)(m+n-1)},\ldots$$

et

$$F(x)=1-\frac{n}{m+n}x+\frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{1}{(m+n)(m+n-1)}x^2$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,\frac{1}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}x^3+\ldots$$

Quant au polynôme $\Phi(x)$, je remarquerai, pour le déterminer, que la fraction $\dfrac{F(x)}{\Phi(x)}$ est une réduite de e^{-x} et que cette fraction tend vers l'unité quand x tend vers zéro; on a donc, en appliquant la formule précédente,

$$\Phi(x) = 1 + \frac{m}{m+n}x + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{(m+n)(m+n-1)}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{1}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}x^3 + \ldots$$

8. Considérons en particulier les *réduites principales*, c'est-à-dire celles où $m = n$; on a alors [1]

$$F(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{2n(2n-1)}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{1}{2n(2n-1)(2n-2)}x^3 + \ldots$$

et

$$\Phi(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{2n(2n-1)}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{1}{2n(2n-1)(2n-2)}x^3 + \ldots,$$

en sorte que $\Phi(x) = F(-x)$.

Ayant

$$e^x = \frac{\Phi(x)}{F(x)} + (x^{2n+1}) \quad [2],$$

on en déduit

$$x = \log\frac{\Phi(x)}{F(x)} + (x^{2n+1})$$

et, en égalant les dérivées des deux membres,

$$\frac{F'(x)}{F(x)} - \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = -1 + (x^{2n}).$$

---

[1] Sur ces polynômes, voir le Mémoire de M. Hermite *Sur la fonction exponentielle.*

[2] Je désigne ici et dans tout ce qui suit par (x^p) une série ordonnée suivant les puissances de x et commençant par un terme de l'ordre x^p.

En désignant par α, β, γ, ... les diverses racines de l'équation $F(x) = 0$, on voit aisément que les racines de l'équation $\Phi(x) = 0$ sont $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, ...; l'égalité précédente peut donc s'écrire

$$\sum \frac{1}{x-\alpha} - \sum \frac{1}{x+\alpha} = -1 + (x^{2n})$$

ou encore

$$\sum \frac{2\alpha}{x^2 - \alpha^2} = -1 + (x^{2n}).$$

En désignant par S_{-p} la somme des inverses des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des racines de l'équation $F(x) = 0$, on en déduit, en développant le premier membre en série,

$$2S_{-1} + 2S_{-3}x^2 + 2S_{-5}x^4 + \ldots = 1 + (x^{2n}),$$

d'où les relations suivantes, qui caractérisent entièrement le polynôme $F(x)$:

$$S_{-1} = \frac{1}{2}, \quad S_{-3} = 0, \quad S_{-5} = 0, \quad \ldots, \quad S_{-(2n-1)} = 0 \quad (^1).$$