ÉDOUARD LUCAS

Sur les cas généraux d'impossibilité de l'équation $x^3 + y^3 = Az^3$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 206-211

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__206_1>

SUR LES CAS GÉNÉRAUX D'IMPOSSIBILITÉ DE L'ÉQUATION $x^3 + y^3 = Az^3$;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Nous avons démontré (¹), d'après M. Sylvester, que, si l'on désigne par p et q deux nombres premiers des formes $18n + 5$ et $18n + 11$, l'équation

$$x^3 + y^3 = Az^3$$

est impossible pour les six valeurs générales de A qui suivent :

$$p, \; 2p, \; 4p^2, \; q^2, \; 2q^2, \; 4q.$$

A ces valeurs on doit ajouter les six valeurs générales

$$p^2, \; q, \; 9p, \; 9p^2, \; 9q, \; 9q^2,$$

qui ont été indiquées par le P. Pépin. Nous allons faire voir que la méthode de Fermat, par la décomposition en facteurs, permet encore de démontrer l'impossibilité pour les six valeurs de A; mais, pour abréger, nous renverrons le lecteur à l'article que nous venons de mention-

(¹) *Nouvelles Annales*, 2ᵉ série, t. XVII, p. 507 et suiv.

ner pour les notations et l'ensemble des démonstrations.

Posons $A = 3^\lambda B$; λ sera égal à 2 ou à 0, et B divisé par 9 donnera pour reste l'un des nombres ± 2, ± 4. Nous aurons alors quatre cas à considérer dans la décomposition

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2):$$

I. $x+y$ divisible par 6;
II. $x+y$ divisible par 3, et non par 2;
III. $x+y$ divisible par 2, et non par 3;
IV. $x+y$ non divisible par 2 et par 3.

Les deux derniers cas ne se présentent que pour $\lambda = 0$; d'ailleurs, $x+y$ sera nécessairement divisible par B (*loc. cit.*, p. 510, ligne 7).

Premier cas : $x+y$ *divisible par* 6. — Alors on a

$$x + y = 2^3 . 3^{\lambda-1} B a^3, \quad b^3 = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{x+y}{6}\right)^2,$$
$$z = 2ab;$$

par conséquent, l'identification donne

$$G = \frac{x+y}{6} = 2^2 . 3^{\lambda-2} B a^3,$$

c'est-à-dire

$$g(f^2 - g^2) = 2^2 . 3^{\lambda-3} B a^3.$$

Pour $\lambda = 0$, a est divisible par 3, et, en posant

$$a = 3a',$$

on a

$$g(f^2 - g^2) = 4 B a'^3,$$

d'où l'on tire

$$g = 4B\alpha^3, \quad f \pm g = \beta^3, \quad f \mp g = \gamma^3,$$

ou bien

$$g = 4\alpha^3, \quad f \pm g = B\beta^3, \quad f \mp g = \gamma^3.$$

Ces deux décompositions donnent

$$\beta^3 - \gamma^3 = B(2\alpha)^3 \quad \text{ou} \quad B\beta^3 - \gamma^3 = (2\alpha)^3;$$

par conséquent, on ramène l'équation proposée à une autre semblable, en moindres nombres, dans laquelle z pair contient un facteur 3 en moins, ce qui conduit au troisième cas, ou dans laquelle z est impair, ce qui conduit au deuxième cas.

De même, pour $\lambda = 2$, on ramène l'équation à une autre en moindres nombres ou à l'équation

$$\beta^3 - 9\gamma^3 = B\alpha^3,$$

qui est impossible suivant le module 9.

Deuxième cas : *$x+y$ divisible par 3, et non par 2.* — Alors on a

$$x+y = 3^{\lambda-1}Ba^3, \quad (x-y)^2 + 3\left(\frac{x+y}{3}\right)^2 = 4b^3,$$
$$z = ab;$$

par conséquent, l'identification donne

$$F + G = \frac{x+y}{3} = 3^{\lambda-2}Ba^3,$$

ou bien

$$f(f^2 - 9g^2) \pm 3g(f^2 - g^2) = 3^{\lambda-2}Ba^3.$$

Mais $g(f^2 - g^2)$ est nécessairement divisible par 3, puisque f ne peut l'être ; donc l'équation précédente est toujours impossible suivant le module 9.

L'impossibilité se trouve donc démontrée pour les quatre valeurs

$$9p, \; 9p^2, \; 9q, \; 9q^2.$$

Troisième cas : *$x+y$ divisible par 2, et non par 3.* — Alors on a

$$x+y = 2^3Ba^3, \quad 3\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = b^3, \quad z = 2ab;$$

par conséquent, l'identification donne

$$F = \frac{x+y}{2} = 4Ba^3,$$

ou bien

$$f(f^2 - 9g^2) = 4Ba^3.$$

On est ainsi ramené aux deux équations de même forme

$$\beta^3 + \gamma^3 = B(2\alpha)^3 \quad \text{et} \quad B\beta^3 + \gamma^3 = (2\alpha)^3.$$

La première est une équation en moindres nombres qui correspond au troisième cas; la seconde est une équation dans laquelle z est impair et non divisible par 3, ce qui correspond au quatrième cas.

Quatrième cas : $x+y$ *non divisible ni par* 2 *ni par* 3. — L'identification donne

$$F \mp 3G = Ba^3,$$

ou bien

$$f(f^2 - 9g^2) \pm 9g(f^2 - g^2) = Ba^3;$$

cette équation est impossible suivant le module 9.

Ainsi, en résumé, les équations

$$x^3 + y^3 = Az^3 \quad \text{et} \quad xy(x+y) = Az^3$$

sont impossibles à résoudre en nombres entiers pour les douze valeurs de A :

$$p,\ p^2,\ q,\ q^2,\ 9p,\ 9p^2,\ 9q,\ 9q^2,\ 2p,\ 4p^2,\ 2q^2,\ 4q.$$

Les théorèmes précédents ne concernent que l'impossibilité pour les facteurs p ou q de la forme $6n+5$; mais il existe un grand nombre d'autres théorèmes généraux d'impossibilité pour les nombres r, s, t des formes respectives $18n+1$, $18n+13$, $18n+17$. Ces nombres appartiennent à la forme linéaire $6n+1$ et à la forme quadratique $L^2 + 3M^2$. On a, par exemple, les théorèmes suivants, dont nous nous réservons la démonstration et qui concernent les nombres r, s, t, pour lesquels le nombre M correspondant de la forme quadratique n'est pas un multiple de 3. Ces nombres sont compris dans le Tableau suivant :

Nombres premiers.	Forme lineaire.	Forme quadratique.
r ou r^2.....	$18n+1$	$(9h\pm 4)^2+3(9k\pm 4)^2$
		$(9h\pm 4)^2+3(9k\pm 1)^2$
		$(9h\pm 4)^2+3(9k\pm 2)^2$
s ou t^2.....	$18n+7$	$(9h\pm 2)^2+3(9k\pm 2)^2$
		$(9h\pm 2)^2+3(9k\pm 4)^2$
		$(9h\pm 2)^2+3(9k\pm 1)^2$
t ou s^2.....	$18n+13$	$(9h\pm 1)^2+3(9k\pm 1)^2$
		$(9h\pm 1)^2+3(9k\pm 2)^2$
		$(9h\pm 1)^2+3(9k\pm 4)^2$

Cela posé, on a le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les équations* $x^3+y^3=\mathrm{A}z^3$ *et* $xy(x+y)=\mathrm{A}z^3$ *sont impossibles à résoudre en nombres entiers pour les huit valeurs suivantes de* A :

$$2r,\ 2r^2,\ 2s,\ 2t^2,\ 4r,\ 4r^2,\ 4t,\ 4s^2.$$

On peut assez facilement trouver des séries indéfinies de théorèmes analogues conduisant à l'*impossibilité*.

On peut aussi obtenir des séries indéfinies de théorèmes conduisant à la *résolution complète ;* mais, dans ce but, il faut employer les résultats dus à M. Sylvester dans son importante théorie de la *résiduation*. On a, par exemple, le théorème suivant :

THÉORÈME. — *On peut résoudre complètement les équations* $x^3+y^3=\mathrm{A}z^3$ et $xy(x+y)=\mathrm{A}z^3$ *par la combinaison des formules*

$$f(x,y,z)=0,\quad x\frac{df}{dx_1}+y\frac{df}{dy_1}+z\frac{df}{dz_1}=0$$

et des formules

$$f(x, y, z) = 0,$$

$$x(y_1 z_2 - y_2 z_1) + y(z_1 x_2 - z_2 x_1) + z(x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0,$$

qui donnent une nouvelle solution au moyen d'une ou de deux premières solutions, pour les valeurs suivantes de A :

1° *Lorsque* A *est un nombre premier* $18n + 13$ *ou le carré d'un nombre premier* $18n + 7$;

2° *Lorsque* A *est le double d'un nombre premier* $18n + 13$ *ou le double du carré d'un nombre premier* $18n + 7$, *à la condition que, dans la forme quadratique correspondante* $L^2 + 3M^2$, *le nombre* M *ne soit pas divisible par* 3 ;

3° *Lorsque* A *est le quadruple d'un nombre premier* $18n + 7$, *ou le quadruple du carré d'un nombre premier* $18n + 13$, *avec la même condition que précédemment.*

On a d'ailleurs, pour les nombres de la forme $L^2 + 3M^2$, les identités suivantes :

$$(3M + L)^3 + (3M - L)^3 = 2^\lambda 3^\mu (L^2 + 3M^2) a^3,$$

avec $M = 2^{\lambda-1} 3^{\mu-2} a^3$;

$$(2L)^3 + (L + 3M)^3 = 3^\mu (L^2 + 3M^2) a^3,$$

avec $L + M = 3^{\mu-2} a^3$;

$$(L + M)^3 + (L - M)^3 = 2^\lambda (L^2 + 3M^2) a^3,$$

avec $L = 2^{\lambda-1} a^3$;

$$(L + M)^3 + (2M)^3 = (L^2 + 3M^2) a^3,$$

avec $L + 3M = a^3$.