NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 184-192

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__184_0>

CORRESPONDANCE.

Mon cher Monsieur Brisse,

Le dernier numéro des *Nouvelles Annales* contient un article du P. Lecointe sur un problème qui, si je ne me trompe, a été donné autrefois par M. Chasles au Concours général. Comme le fait très justement remarquer le P. Lecointe, toutes les solutions données dans votre Recueil sont incomplètes et ne fournissent qu'une partie du lieu. Ce fait important n'avait pas échappé à plusieurs de vos lecteurs; M. Bos, notamment, m'en avait parlé, il y a déjà longtemps, et il avait étudié la courbe du quatrième ordre qu'il faut joindre à la conique pour obtenir la solution complète de la question [1].

Permettez-moi de vous donner quelques indications sur une question plus générale, que je propose depuis longtemps comme exercice à mes élèves et dont voici l'énoncé :

On considère une conique fixe (S) *et des coniques variables passant par quatre points fixes* A_1, A_2, A_3, A_4. *On mène les tangentes communes à la conique fixe* (S) *et à l'une des coniques variables, et l'on demande le lieu du point de concours de ces tangentes.*

Il est clair que, si l'on suppose deux des points A_1, A_2 sur la conique (S) et les deux autres à l'infini sur le cercle, le problème précédent coïncide avec celui qui a d'abord été proposé par M. Chasles et si souvent traité dans votre Recueil.

---

[1] Il y a longtemps aussi que j'ai fait résoudre la question dans mes conférences à Sainte-Barbe et étudier la courbe du quatrième ordre qui accompagne la conique. Ch. B.

Voici comment on peut obtenir rapidement l'équation du lieu.

Soit

$$S = 0$$

l'équation de la conique (S), et désignons par x', y' les coordonnées d'un point du lieu. Si l'on pose

$$2P = x'\frac{dS}{dx} + y'\frac{dS}{dy} + z'\frac{dS}{dz},$$

l'équation des deux tangentes menées du point (x', y') à la conique (S) sera

$$SS' - P^2 = 0,$$

S' désignant ce que devient S quand on y substitue x', y' à x, y.

Pour tout point du lieu, il y aura une conique tangente aux deux droites précédentes et passant par les quatre points A_i. Soit

$$(1) \qquad P^2 - SS' = (mx + ny + p)^2$$

l'équation de cette conique, et désignons par x_i, y_i les coordonnées du point A_i, par S_i, P_i les résultats de la substitution de ces coordonnées à x, y dans S et dans P; on devra avoir les quatre équations

$$\begin{gathered} \pm\sqrt{P_1^2 - S_1 S'} = mx_1 + ny_1 + p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \pm\sqrt{P_4^2 - S_4 S'} = mx_4 + ny_4 + p. \end{gathered}$$

En éliminant m, n, p, on est conduit à l'équation irrationnelle du lieu

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\pm(234)\sqrt{P_1^2 - S_1 S'} \pm (134)\sqrt{S_2 S' - P_2^2} \\ &\quad \pm(124)\sqrt{S_3 S' - P_3^2} \pm (123)\sqrt{S_4 S' - P_4^2} = 0, \end{aligned} \right.$$

(234) désignant, pour abréger, le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix},$$

et (134), (124), (123) ayant des significations analogues.

L'équation (2) peut être rendue rationnelle, et elle devient alors du huitième degré; mais il est aisé de voir qu'elle contiendra S' en facteur. En effet, si l'on fait $S' = 0$ et si l'on extrait la racine de chaque radical, la somme

$$(234)P_1 - (134)P_2 + (124)P_3 - (123)P_4,$$

correspondant à l'une des combinaisons de signes que l'on peut choisir, est identiquement nulle. Le lieu est donc en réalité du sixième degré. Il est d'ailleurs très facile d'expliquer *a priori* pourquoi le facteur S' s'introduit dans l'équation par la méthode que j'indique ici.

L'étude de ce lieu, de ses points multiples, des cas dans lesquels il se décompose mériterait d'être faite avec soin et pourrait donner naissance à un petit Mémoire fort intéressant. Ainsi l'on voit tout de suite que les équations

$$S_i S' - P_i^2 = 0$$

représentent les huit tangentes menées des points A_i à la conique S et sont des tangentes triples du lieu, etc.

Je me contenterai de quelques remarques fort simples.

Toutes les fois que l'un des points A_i sera sur la conique (S), le radical correspondant $\sqrt{P_i^2 - S'S_i}$ deviendra un carré parfait et pourra être remplacé par $\pm P_i$. D'après cela, supposons que deux des points A_1, A_1, A_2 par exemple, soient sur la conique (S); l'équation du lieu se décomposera en deux autres,

$$(234)P_1 + (134)P_2 + (124)\sqrt{P_3^2 - S_3S'} + (123)\sqrt{P_4^2 - S_4S'} = 0$$

et

$$(234)P_1 - (134)P_2 + (124)\sqrt{P_3^2 - S_3S'} + (123)\sqrt{P_4^2 - S_4S'} = 0,$$

qui conduiront à des équations rationnelles différentes représentant chacune une courbe du quatrième degré; mais la seconde contiendra S' en facteur et donnera une conique après la suppression de ce facteur. Il est d'ailleurs évident que cette conique sera tangente aux droites représentées par les équations

$$P_3^2 - S_3S' = 0, \quad P_4^2 - S_4S' = 0,$$

c'est-à-dire aux quatre tangentes menées de A_3, A_4 à la conique (S). Dans le cas particulier où A_3, A_4 sont à l'infini sur le cercle, la conique sera donc homofocale à (S).

Supposons maintenant que les trois points A_1, A_2, A_3 soient sur S. L'équation irrationnelle se décompose en quatre autres, correspondant aux combinaisons de signes

$$\begin{array}{cccc} + & + & + & \pm \\ + & + & - & \pm \\ + & - & + & \pm \\ - & + & + & \pm \end{array}$$

des quatre termes, et l'on obtiendra quatre coniques, dont l'une est la conique S.

Enfin, si les quatre points A_i sont sur (S), trois des équations précédentes représentent des droites, et la quatrième est identiquement vérifiée. Ce résultat était évident *a priori*. Il équivaut au théorème suivant, bien connu :

Si l'on considère les coniques d'un faisceau, les points de concours des tangentes communes à deux coniques du faisceau sont les côtés du triangle conjugué commun aux deux coniques.

J'ajouterai, en terminant, que les cas indiqués précédemment ne sont pas les seuls dans lesquels le lieu se décompose. Je crois avoir autrefois proposé comme exercice à vos lecteurs celui où le quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ serait circonscrit à (S), par exemple où A_1, A_2, A_3, A_4 seraient les foyers de (S). Vous voyez que l'étude complète pourrait donner lieu à des propositions intéressantes.

Votre bien dévoué, G. DARBOUX.

Monsieur le Rédacteur,

M. Biehler a publié, dans le dernier numéro des *Nouvelles Annales*, une Note qui a pour objet de transformer le résultant de Sylvester en celui de Bezout et de Cauchy. A la fin de son exposé, M. Biehler veut bien rappeler que, dans un travail sur l'élimination, portant la date du 15 février 1877, j'ai donné *une* méthode pour effectuer cette transformation. S'il avait tenu à être exact, il aurait dû dire que j'avais fait connaître, non pas une méthode, mais la méthode même dont il venait de se servir, et qu'il l'avait empruntée à un opuscule lithographié, placé depuis longtemps entre les mains de mes élèves.

Voici, du reste, pour l'édification du lecteur, le passage de ma brochure où est développé ce procédé de transformation :

« Prenons d'abord deux équations de même degré,

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0,$$
$$b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4 = 0.$$

Le déterminant de Sylvester peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}.$$

Multiplions ses huit lignes par les termes de mêmes rangs dans la suite

$$-b_0,\ a_0,\ -b_1,\ a_1,\ -b_2,\ a_2,\ -b_3,\ a_3;$$

faisons dans chaque colonne la somme des produits pour la substituer à l'élément correspondant de la deuxième ligne. Les éléments des quatre premières colonnes se détruisent et, en représentant par $(a_p b_q)$ les binômes tels que $(a_p b_q - b_p a_q)$, nous obtenons pour la nouvelle ligne (2)

$$(2') \qquad 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ (a_0 b_4),\ (a_1 b_4),\ (a_2 b_4),\ (a_3 b_4).$$

» Dans le nouveau déterminant, faisons abstraction des deux premières lignes et répétons sur les six autres l'opération qui vient d'être faite sur les huit premières, en commençant toujours par le facteur $(-b_0)$. Il vient pour la nouvelle ligne (4)

$$(4') \quad 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ (a_0 b_3),\ [(a_0 b_4) + (a_1 b_3)],\ [(a_1 b_4) + (a_2 b_3)],\ (a_2 b_4).$$

» Laissons de côté les quatre premières lignes et répétons encore la même opération sur les quatre suivantes. La nouvelle ligne (6) sera

$$(6') \quad 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ (a_0 b_2),\ [(a_0 b_3) + (a_1 b_2)],\ [(a_0 b_4) + (a_1 b_3)],\ (a_1 b_4).$$

» Négligeons les six premières lignes et opérons comme précédemment sur les deux dernières ; nous aurons pour la nouvelle ligne (8)

$$(8') \qquad 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ (a_0 b_1),\ (a_0 b_2),\ (a_0 b_3),\ (a_0 b_4).$$

» Écrivons au-dessous de toutes les lignes en (a) les quatre nouvelles lignes dans l'ordre inverse, savoir : (8'), (6'), (4'), (2'); nous obtenons un déterminant dont les quatre premières lignes sont

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

» Développant et ordonnant ce déterminant par rapport aux éléments de la première colonne, ainsi que les mineurs qui correspondent à l'élément a_0, on voit qu'il se réduit à a_0^4 multiplié par le déterminant du quatrième ordre formé par les quatre dernières colonnes des lignes (8'), (6'), (4'), (2'). Mais, dans les opérations effectuées précédemment, il est visible que nous avons multiplié le déterminant par a_0^4 ; il faut donc supprimer ce facteur, et par suite le déterminant de Sylvester est transformé dans le suivant, qui est précisément celui de Bezout et Cauchy :

$$\begin{vmatrix} (a_0 b_1) & (a_0 b_2) & (a_0 b_3) & (a_0 b_4) \\ (a_0 b_2) & [(a_0 b_3) + (a_1 b_2)] & [(a_0 b_4) + (a_1 b_3)] & (a_1 b_4) \\ (a_0 b_3) & [(a_0 b_4) + (a_1 b_3)] & [(a_1 b_4) + (a_2 b_3)] & (a_2 b_4) \\ (a_0 b_4) & (a_1 b_4) & (a_2 b_4) & (a_3 b_4) \end{vmatrix}.$$

» Passons au cas où les deux équations proposées ont des degrés différents. Soit, par exemple, le système

$$A = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0,$$
$$B = b_0 x^2 + b_1 x + b_2 = 0.$$

» Le déterminant de Sylvester, écrit comme précédemment, est

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

» Laissons de côté les deux dernières lignes et appliquons aux quatre premières la transformation faite dans le cas précédent. Il vient ainsi, en écrivant au-dessous des deux nouvelles lignes celles que nous avions omises,

$$\begin{vmatrix} (a_0 b_1) & (a_0 b_2) & -b_0 a_3 & -b_0 a_4 \\ (a_0 b_2) & [-b_0 a_3 + (a_1 b_2)] & [-b_0 a_4 - b_1 a_3] & -b_1 a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}. \text{»}$$

Tel est le procédé de transformation ou d'abaissement que j'enseignais dès 1877 au lycée Fontanes. Pour en montrer la généralité à mes élèves, j'ajoutais simplement (et ils l'auraient ajouté d'eux-mêmes) : S'il s'agissait de deux équations de degré m, il faudrait répéter m fois l'opération que nous venons de faire quatre fois dans le premier exemple, et pour deux équations des degrés m et $n < m$, on laisserait de côté les $(m - n)$ dernières lignes du résultant, puis l'on transformerait les $2n$ premières comme dans le cas précédent. Peut-on dire, après cela, comme le prétend M. Biehler, que je n'ai pas assez mis en évidence la généralité et le principe de la méthode? Ce double grief soutient-il l'examen?

Ma dignité exigeait que tous les éléments de comparaison fussent placés sous les yeux des lecteurs; je serai satisfait lorsqu'ils se seront prononcés en connaissance de cause sur les droits de chacun et sur ses procédés.

VENTÉJOL.

Nous avons reçu trop tard, pour les mentionner en temps opportun, les solutions des questions suivantes : 1286, par M. F. Pisani; 1234 et 1289, par M. E. Fauquembergue; 1311, par MM. Fauquembergue et Barisien; 1315, par MM. Barisien, A. Boilleau et Choudadow, à Stawropol (Caucase); 1316, par M. V. Habbé; et 1325, par M. J. de Virieu.