Concours d'agrégation des sciences mathématiques de 1879

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 177-183

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__177_1>

CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES DE 1879.

Mathématiques spéciales.

On donne un hyperboloïde à une nappe et un point A. On considère un paraboloïde circonscrit à l'hyperboloïde et tel que le plan P de la courbe de contact passe par le point A; soit M le point d'intersection de ce paraboloïde avec celui de ses diamètres qui passe par le point A; soit Q le point de rencontre du plan P avec la droite qui joint le point M au pôle du plan P par rapport à l'hyperboloïde.

Le plan P tournant autour du point A, on demande :

1° Le lieu du point M;

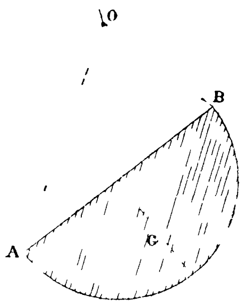
2° Le lieu du point Q : ce second lieu est une surface du second degré S que l'on discutera en faisant varier la position du point A dans l'espace;

3° Le lieu des positions que doit occuper le point A pour que la surface S soit de révolution.

Mathématiques élémentaires et Mécanique.

Une lame homogène, pesante, et d'une épaisseur infiniment petite, a la forme d'un demi-cercle ACB; elle est soutenue par un fil attaché aux extrémités du diamètre AB, et qui passe dans un anneau fixe infiniment petit O.

On demande de déterminer les positions d'équilibre de la lame et de reconnaître dans quels cas cet équilibre est stable ou instable.



On donne la longueur l du fil, le rayon R du demi-cercle ACB, et le poids P de la lame.

(On négligera le poids du fil.)

Nota. — Pour reconnaître si l'équilibre est stable ou instable, on pourra chercher pour quelles positions de la lame la distance du centre de gravité G de cette lame au plan horizontal qui passe par l'anneau O est un maximum ou un minimum.

Composition sur certaines parties du programme de la licence, désignées par l'arrêté du 21 décembre 1878.

Théorie. — Intégration de l'équation $Pp + Qq = R$, où P, Q, R désignent des fonctions données de x, de y et de z, et p, q les dérivées partielles de z par rapport à x et par rapport à y.

Application. — On donne un ellipsoïde, et, sur cette surface, deux points diamétralement opposés, A et B. On joint les points A et B à un point variable m de l'ellipsoïde. Trouver une surface S telle que le plan tangent au point M où elle est rencontrée par la droite Am soit parallèle à la droite Bm.

Trouver sur cette surface une courbe telle que la tangente en chaque point M de cette courbe et l'intersection du plan tangent à la surface en M avec le plan qui passe par ce point M et par le diamètre AB soient deux tangentes conjuguées par rapport à la surface.

Mathématiques spéciales (*Leçons*).

1° Asymptotes des courbes rapportées à des coordonnées rectilignes (première leçon).

2° Sections circulaires des surfaces du second ordre. — Cas où la surface est rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires quelconques.

3° Application de la théorie des dérivées à l'étude des fonctions d'une seule variable. — Exemples.

4° Équation du plan tangent. — Application aux surfaces du second ordre.

5° Théorème de Rolle. — Son application à la séparation des racines d'une équation algébrique ou transcendante.

6° $\text{Lim}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ quand m devient infini.

7° Approximation des racines. — Méthode de Newton.

8° Plans diamétraux dans les surfaces du second ordre.

9° Transformation des équations algébriques. — Exemples.

10° Première leçon sur les séries.

11° Conditions pour qu'une surface du second ordre soit de révolution. — Exemples.

12° Tangentes et asymptotes en coordonnées polaires.

13° Théorème de Sturm.

14° Règle des signes de Descartes.

15° Étant donnée l'équation générale d'une ellipse ou d'une hyperbole, déterminer les axes en grandeur et en position. — Étant donnée l'équation générale d'une parabole, trouver l'équation de son axe et la grandeur du paramètre.

16° Intersection d'un cône et d'un cylindre dans le cas où la courbe d'intersection a des branches infinies.

17° Mener par une droite un plan tangent à un hyperboloïde de révolution à une nappe.

18° Section plane de l'hyperboloïde de révolution à une nappe.

19° Intersection de deux courbes du second degré. — Ramener la question à la résolution d'une équation du troisième degré.

20° Discussion de l'équation du second degré à deux variables (Géométrie analytique).

21° Étude algébrique de l'équation en S.

Mathématiques élémentaires (Leçons).

1° Résolution et discussion de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

2° Maximum et minimum de l'expression

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}.$$

3° Résolution des équations $ax + by = c$, $a'x + b'y = c'$. — Discussion.

4° Équation bicarrée. — Transformation des expressions $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ en une somme ou une différence de deux radicaux simples.

5° Étude du trinôme $ax^2 + bx + c$.

6° Conversion d'une fraction ordinaire en fractions décimales. — Fractions périodiques.

7° Plus grand commun diviseur et plus petit commun multiple de plusieurs nombres entiers.

8° Racine carrée d'un nombre entier.

9° Division des nombres entiers.

10° Figures symétriques par rapport à un axe, par rapport à un centre, par rapport à un plan.

11° Première leçon sur la mesure des volumes.

12° Mesure des angles.

13° Volume de la sphère et du segment sphérique.

14° Recherche du rapport de la circonférence au diamètre.

15° Recherche du rapport de la circonférence au diamètre.

16° Parabole.

17° Aire du fuseau et du triangle sphérique.

18° Formules relatives à l'addition et à la soustraction des arcs.

19° Connaissant $\sin a$ ou $\cos a$, calculer $\sin\frac{a}{2}$ et $\cos\frac{a}{2}$. — Connaissant $\tan a$, calculer $\tan\frac{a}{2}$.

20° Construction des Tables trigonométriques.

21° Distance d'un point à un plan, à une droite. — Plus courte distance de deux droites.

Géométrie descriptive.

Intersection d'un paraboloïde hyperbolique et d'un hyperboloïde de révolution à une nappe, les deux surfaces ayant une génératrice commune.

La ligne de terre est parallèle au petit côté du cadre et à $0^{m},17$ au-dessus du bord supérieur.

Hyperboloïde. — L'axe est vertical, et sa projection verticale est au milieu de la feuille; sa projection horizontale O est à 115^{mm} de la ligne de terre. Le cercle de gorge est à 80^{mm} au-dessus du plan horizontal, son rayon est 40^{mm}. La trace de l'hyperboloïde sur le plan horizontal est un cercle de rayon égal à 110^{mm}.

Paraboloïde. — Il a pour plan directeur le plan horizontal et pour directrices :

1° La génératrice ab, $a'b'$ de l'hyperboloïde, dont la trace horizontale est sur la parallèle à la ligne de terre menée par le point O, et à gauche de ce point, et dont le point de rencontre avec le cercle de gorge est derrière le plan de front mené par l'axe ;

2° La verticale menée par un point O du plan horizontal situé derrière le plan de front mené par l'axe, et distant de 44^{mm} du point A et de 68^{mm} du point O.

On représente ce qui reste de l'hyperboloïde quand on enlève tout ce qui est au-dessus de la surface du paraboloïde.

Composition sur un sujet de licence.

Un point pesant M, assujetti à rester sur la surface d'un cône de révolution dont l'axe est vertical, est attiré par un centre placé au sommet S du cône : l'attraction est proportionnelle à une fonction inconnue de la distance MS.

1° Trouver quelle doit être cette fonction pour que la trajectoire du point M soit plane.

2° Étudier, dans ces conditions, le mouvement de la projection du point M sur un plan horizontal.

3° Déterminer la réaction du cône, pour une position quelconque du point M sur sa trajectoire.

Exercice de calcul.

Étant donnée l'équation

$$\begin{gathered}4x^2 + 25y^2 + 49z^2 - 70yz - 28zx \\ + 20xy - 2x - 4y + 6z + \frac{1}{13} = 0,\end{gathered}$$

qui représente une surface du second ordre rapportée à des axes rectangulaires, on demande de ramener cette équation à la forme la plus simple, en choisissant de nouveaux axes rectangulaires dont on déterminera la position par rapport aux axes primitifs.