Concours général (1879)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 173-177

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__173_1>

CONCOURS GÉNÉRAL (1879).

Mathématiques spéciales.

Étant donné un hyperboloïde à une nappe et un point P dans le plan de l'ellipse de gorge, par le point P on mène une parallèle PH à une position G de l'une des deux génératrices rectilignes de l'hyperboloïde, et l'on considère le cylindre de révolution ayant pour axe la droite PH et passant par la droite G. La projection sur le plan de l'ellipse de gorge de l'intersection du cylindre et de l'hyperboloïde est une courbe du troisième degré, ayant un point double : trouver le lieu de ce point double quand la droite G décrit l'hyperboloïde.

Philosophie.

I. On donne un quadrilatère ABCD : inscrire dans ce quadrilatère un trapèze isoscèle MNPQ, dont le sommet M est donné et dont les deux côtés parallèles MN, PQ sont parallèles à la diagonale AC du quadrilatère. Pour quelles positions du point M ce trapèze se réduit-il à un triangle?

II. Donner les dénominateurs de toutes les fractions ordinaires irréductibles qui, réduites en fractions décimales, donnent naissance à une fraction décimale périodique mixte, dont la période a trois chiffres et la partie non périodique deux chiffres.

Résoudre la même question quand la période a quatre chiffres et la partie non périodique un chiffre.

Mathématiques élémentaires.

I. On considère un quadrilatère ABCD dans lequel on a $AB = BC$ et $CD = DA$: 1° on demande de prouver que ce quadrilatère est circonscriptible à deux cercles; 2° on déforme ce quadrilatère de telle manière que les côtés demeurent invariables et que les points A, B demeurent fixes. On demande le lieu des centres des cercles inscrits aux différentes positions du quadrilatère.

II. Étant données les deux équations

$$ax + by + cz = 0, \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0,$$

en déduire les rapports $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{y}$, $\frac{x}{z}$ par des formules ne contenant pas de radicaux au dénominateur. Chercher dans quel cas les valeurs de ces rapports sont réelles.

Rhétorique.

Soit AB une portion de droite de longueur donnée; on prend entre A et B, sur la droite AB, un point C, et, sur AC comme diamètre, on décrit une demi-circonférence ; par le point B on mène une tangente à cette demi-circonférence : soit D le point de contact, et soit E le point où cette tangente rencontre la perpendiculaire menée à la droite AB par le point A.

Déterminer le point C de telle façon que, si l'on fait tourner la figure autour de la droite AB, la surface engendrée par l'arc de cercle AD et la surface engendrée par la portion de droite BE soient dans un rapport égal à un nombre donné m.

Indiquer les conditions de possibilité. Appliquer dans le cas particulier où m est égal à $\frac{1}{2}$, et, dans ce cas, trouver le rapport des surfaces engendrées par les deux portions BD, DE de la droite BE.

Seconde.

I. On donne deux droites parallèles RR′, SS′, et une droite perpendiculaire à ces parallèles rencontrant RR′ en A et SS′ en B. Sur RR′, à partir du point A, on porte une longueur arbitraire AA′, et sur SS′, à partir du point B, et du même côté par rapport à AB, on porte une longueur BB′ telle que le produit des longueurs AA′ et BB′ soit égal au carré de AB ; on mène les droites AB′ et BA′, et l'on désigne par M leur point de rencontre ; on mène par le point M une perpendiculaire à AB, et l'on désigne par P et par Q les points où elle rencontre les droites AB, A′B′. Enfin on désigne par C le point où la droite A′B′ rencontre la droite AB :

1° Trouver le lieu décrit par le point M quand on fait varier la longueur AA′ ;

2° Démontrer que le point M est le milieu de PQ ;

3° Démontrer que la tangente au point M à la courbe que décrit ce point passe par le point C.

II. Soit a la longueur du côté d'un triangle équilatéral ABC : calculer la distance du point A à un point M situé sur AB, entre A et B, de façon que, si l'on désigne par P et par Q les pieds des perpendiculaires abaissées du point M sur les côtés AC et BC du triangle, le rapport de l'aire du quadrilatère APQB à l'aire du triangle ABC soit égal à un nombre donné m.

Indiquer les conditions de possibilité ; appliquer en supposant m égal à $\frac{15}{32}$, et, dans ce cas, déterminer par une construction géométrique la position du point M.

Troisième.

I. On donne une circonférence O et une droite RS tangente à cette circonférence au point A ; on prend un diamètre quelconque BC, et des extrémités B, C de ce diamètre on abaisse les perpendiculaires BB', CC' sur la tangente RS ; on mène les cordes AB, AC.

Démontrer que le rapport de l'aire du triangle ABC à l'aire du trapèze BB'C'C est le même quelle que soit la direction du diamètre BC.

II. Soit I le point de concours des hauteurs d'un triangle ABC ; on construit un second triangle A'B'C' dont les sommets A', B' et C' sont respectivement symétriques au point I par rapport aux droites BC, AC, AB :

1° Démontrer que les deux triangles ABC, A'B'C' sont inscrits dans un même cercle ;

2° Évaluer les angles du triangle A'B'C' en supposant connus les angles du triangle ABC ;

3° Désignant par M et par N les points où la droite AB rencontre les droites B'C' et C'A', par P et par Q les points où la droite BC rencontre les droites C'A' et A'B', enfin par R et par S les points où la droite CA rencontre les droites A'B' et B'C', démontrer que les trois droites MQ, NR, PS passent par un même point.

Dans chaque question, on examinera séparément les cas où les trois angles du triangle ABC sont aigus et le cas où l'un d'entre eux, A par exemple, est obtus.