NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EM. LEMOINE

Quelques théorèmes sur les tétraèdres dont les arêtes opposées sont égales deux à deux, et solution de la question 1272

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 133-138

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__133_1>

QUELQUES THÉORÈMES SUR LES TÉTRAÈDRES DONT LES ARÊTES OPPOSÉES SONT ÉGALES DEUX A DEUX, ET SOLUTION DE LA QUESTION 1272;

PAR M. EM. LEMOINE.

Soit SABC le tétraèdre

$$(SA = CB = a, \quad SB = AC = b, \quad SC = AB = c).$$

(²) L'auteur s'est imposé inutilement la condition que l'axe des x coupe la conique en deux points réels. CH. B.

Soient

A', B', C', α, β, γ les milieux de SA, SB, SC, BC, AC, AB;

ω_s, ω_a, ω_b, ω_c les pieds sur chaque face des hauteurs du tétraèdre;

ω'_s, ω'_a, ω'_b, ω'_c les points de concours des hauteurs de chaque face;

O le centre de gravité;

O_s le centre du cercle circonscrit à la face ABC.

Soient

x l'angle que la face SAC fait avec SAB;

x' l'angle que la face CBA fait avec CBS;

y, y', z, z' les autres angles des faces entre elles.

Si, dans un tétraèdre, les quatre faces sont équivalentes, elles sont égales et, par suite, les arêtes opposées sont égales deux à deux.

En écrivant que la somme des projections de trois faces sur la quatrième est égale à cette quatrième, on a

$$\begin{aligned}
1 &= \cos x' + \cos y' + \cos z', \\
1 &= \cos x + \cos y + \cos z', \\
1 &= \cos y + \cos z + \cos x', \\
1 &= \cos z + \cos x + \cos y'.
\end{aligned}$$

Ajoutons ensemble les deux premières de ces équations, puis les deux dernières; retranchons ces deux sommes l'une de l'autre, et divisons par 2, il vient

$$0 = \cos z' - \cos z;$$

d'où, *sans ambiguïté*, $z = z'$. On aurait de même $x = x'$, $y = y'$.

Les angles trièdres de chaque sommet étant composés de dièdres égaux entre eux deux à deux, ces trièdres sont égaux ; les angles plans de ces trièdres sont donc égaux deux à deux ; les faces du tétraèdre sont alors semblables ; mais, comme elles sont équivalentes par hypothèse, elles sont égales, etc.

On a

$$\beta B = \beta S,$$

puisque les triangles SCA, BCA sont égaux ; donc $\beta B'$ est perpendiculaire à SB. Par suite, $OS = OB$; de même, $OS = OA$, $OS = OC$. On voit donc que :

Le centre de la sphère circonscrite coïncide avec le centre de gravité du tétraèdre.

La distance de O à chaque face est le quart de la hauteur du tétraèdre opposée à cette face. Mais ces hauteurs sont égales ; donc le point O est à égale distance des quatre faces, c'est-à-dire que :

Le centre de la sphère inscrite au tétraèdre coïncide avec le centre de gravité.

$\omega_s O_s$, $\omega_a O_a$, $\omega_b O_b$, $\omega_c O_c$ sont égaux comme représentant la distance de points analogues dans les faces qui sont des triangles égaux. Mais ces longueurs égales représentent aussi les distances de O aux hauteurs $S\omega_s$, $S\omega_a$, $S\omega_b$, $S\omega_c$; donc :

Il y a une sphère de centre O *tangente aux quatre hauteurs du tétraèdre.*

Soit M_s le centre de gravité de ACB ; M_s, O_s, ω_s sont en ligne droite, et $O_s\omega_s = 3M_sO_s$. Mais M_s, ω'_s, O_s sont aussi en ligne droite, et l'on a

$$O_s\omega'_s = 3M_sO_s,$$

d'après un théorème connu. Donc enfin ω_s, ω'_s, O_s sont en ligne droite, et l'on a

$$O_s\omega_s = O_s\omega'_s.$$

Par suite, la sphère tangente à $S\omega_s$ et de centre O est tangente à la perpendiculaire menée en ω'_s à la face ABC, d'où :

Il y a une sphère de centre O *tangente aux perpendiculaires à chaque face menées par son point de concours des hauteurs.*

Les théorèmes démontrés jusqu'ici [théorèmes que nous avons donnés au mois d'août 1875 à la Section de Mathématiques, à Nantes, au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, les uns sous une forme identique, les autres sous des formes peu différentes (*voir* le Volume des Communications faites au Congrès)] donnent la solution de la question 1272.

$A'\alpha$ est perpendiculaire sur BC et sur SA ; donc :

Les perpendiculaires communes aux arêtes opposées passent par les milieux de ces arêtes et, par suite, se coupent au centre de gravité.

Il est facile de voir que : *les trois perpendiculaires communes aux arêtes opposées sont rectangulaires deux à deux* et que l'on a

$$\alpha A' = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2},$$

$$\beta B' = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2},$$

$$\gamma C' = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

Le triangle OSA', rectangle en A', donne

$$\overline{OS}^2 = \overline{OA'}^2 + \overline{SA'}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8}.$$

C'est le carré du rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre.

Appelons R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC; on a

$$\overline{OO_s}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{O_sA}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8} - R^2.$$

C'est le carré du rayon de la sphère inscrite au tétraèdre.

Puisque O est aussi le centre de gravité du tétraèdre, la hauteur $S\omega_s = 4OO_s$; donc, en appelant P la surface du triangle ABC, on a

$$\overline{S\omega_s}^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{a^2 b^2 c^2}{P^2},$$

et l'on peut mettre le second membre sous la forme

$$\frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{8P^2}.$$

Le triangle rectangle OO_sM_s donne

$$\overline{O_sM_s}^2 = \overline{OM_s}^2 - \overline{OO_s}^2.$$

Mais

$$OM_s = \frac{1}{3} OS;$$

donc

$$\overline{O_sM}^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Comme O_sM_s est le tiers de $O_s\omega'_s$, on a ce théorème :

Dans un triangle ABC, *le carré de la distance du centre du cercle circonscrit au point de concours des hauteurs est égal à neuf fois le carré du rayon du cercle circonscrit, moins la somme des carrés des trois côtés.*

J'avais donné ce théorème dans les *Nouvelles Annales* il y a quelques années : j'ai vu depuis qu'il y avait déjà été démontré par M. Brassine.