NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LAURENT

Sur la réduction des polynômes du second degré homogènes à des sommes de carrés

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 12-27

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__12_1>

SUR LA RÉDUCTION DES POLYNOMES DU SECOND DEGRÉ HOMOGÈNES A DES SOMMES DE CARRÉS;

PAR M. H. LAURENT.

Le but de cette Note est surtout l'étude d'une équation remarquable que l'on rencontre dans un grand nombre de questions d'Analyse, et principalement en Géométrie analytique, dans la recherche des axes des courbes et des surfaces du second ordre, dans la recherche de leurs diamètres conjugués parallèles, dans la recherche de leurs intersections, etc. Cette étude est plus simple et plus complète que celles qui ont été faites jusqu'ici.

Pour l'intelligence des questions qui vont suivre, il faut savoir que l'on appelle *substitution orthogonale* tout changement de variable de la forme

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} x_1 = \gamma_{11}y_1 + \gamma_{12}y_2 + \ldots + \gamma_{1n}y_n, \\ x_2 = \gamma_{21}y_1 + \gamma_{22}y_2 + \ldots + \gamma_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

dans lequel les coefficients γ_{ij} satisfont aux relations

$$\Sigma\gamma_{i\mu}\gamma_{j\nu} = 0, \quad \Sigma\gamma_{i\mu}\gamma_{j\mu} = 1.$$

Quand on remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par leurs valeurs (α), la fonction $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ devient $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$. Tel est le caractère des substitutions orthogonales.

Les changements de coordonnées dans lesquels les anciens et les nouveaux axes sont rectangulaires sont des substitutions orthogonales.

RÉDUCTION D'UN POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ A UNE SOMME DE CARRÉS PAR UNE SUBSTITUTION ORTHOGONALE.

On peut ramener le polynôme $f = \Sigma a_{ij} x_i x_j$ à n variables à une somme de n carrés, au moyen d'une substitution orthogonale. Effectuons, en effet, la substitution orthogonale à coefficients indéterminés

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x_1 = \gamma_{11} y_1 + \gamma_{12} y_2 + \ldots + \gamma_{1n} y_n, \\ x_2 = \gamma_{21} y_1 + \gamma_{22} y_2 + \ldots + \gamma^2{}_n y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \gamma_{n1} y_1 + \gamma_{n2} y_2 + \ldots + \gamma_{nn} y_n, \end{array}\right.$$

où nous supposons

$$(2)\qquad \gamma_{1\mu}^2 + \gamma_{2\mu}^2 + \ldots + \gamma_{n\mu}^2 = 0,$$

$$(2\ bis)\qquad \gamma_{1\mu}\gamma_{1\nu} + \gamma_{2\mu}\gamma_{2\nu} + \ldots + \gamma_{n\mu}\gamma_{n\nu} = 0,$$

la fonction f prendra la forme

$$f = \Sigma a_{ij}(\gamma_{i1} y_1 + \gamma_{i2} y_2 + \ldots + \gamma_{i\mu} y_\mu + \ldots)(\gamma_{j1} y_1 + \ldots + \gamma_{j\nu} y_\nu + \ldots),$$

ou bien

$$f = + \Sigma a_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{i\nu} y_\mu y_\nu + \ldots + \Sigma a_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\mu} y_\mu^2 + \ldots.$$

Si l'on pose alors

$$(3)\qquad \Sigma a_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\nu} = 0 \quad \text{pour } \mu \gtrless \nu,$$

$$(4)\qquad \Sigma a_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\mu} = A_\mu,$$

la fonction f prendra la forme d'une somme de carrés

$$(5)\qquad f = A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + \ldots + A_n y_n^2.$$

Il reste à prouver que l'on peut satisfaire aux équations (2) et (3), qui sont au nombre de

$$\frac{n(n-1)}{2} + n + \frac{n(n-1)}{2} = n^2,$$

comme les inconnues $\gamma_{\iota,}$. Or, si l'on appelle $f_1(x_1, x_2, \ldots)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots)$, ... les demi-dérivées de $\Sigma\, a_{\iota,} x_\iota x_,$ prises par rapport à x_1, x_2, ..., en sorte que

$$f_\iota(x_1, x_2, \ldots) = a_{1\iota} x_1 + a_{2\iota} x_2 + \ldots + a_{n\iota} x_n,$$

les formules (3) pourront s'écrire

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_{1\mu}(a_{11}\gamma_{1\nu} + a_{12}\gamma_{1\nu} + \ldots + a_{1n}\gamma_{n\nu}) \\ + \gamma_{2\mu}(a_{21}\gamma_{1\nu} + a_{22}\gamma_{2\nu} + \ldots + a_{2n}\gamma_{n\nu}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = 0,$$

ou

$$\gamma_{1\mu} f_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots) + \gamma_{2\mu} f_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots) + \ldots = 0.$$

La comparaison de ces équations, où l'on peut supposer ν fixe, avec les équations (2 *bis*), où l'on supposera aussi ν fixe, donnera

$$(6)\quad \frac{f_1(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots)}{\gamma_{1\nu}} = \frac{f_2(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots)}{\gamma_{2\nu}} = \ldots = \frac{f_n(\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots)}{\gamma_{n\nu}}.$$

Ces équations sont plus faciles à traiter que les équations (3) et (2 *bis*), et pour les résoudre nous supposerons ν fixe; omettant alors pour le moment cet indice, qui complique la notation, et introduisant l'inconnue auxiliaire s, nous poserons

$$s = \frac{f_1(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)}{\gamma_1} = \frac{f_2(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)}{\gamma_2} = \ldots$$
$$= \frac{f_n(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)}{\gamma_n},$$

d'où nous déduirons

$$f_1 - \gamma_1 s = 0, \quad f_2 - \gamma_2 s = 0, \quad \ldots, \quad f_n - \gamma_n s = 0,$$

ou bien, en remplaçant $f_1, f_2, \ldots$ par leurs valeurs

$$(7)\quad \begin{cases} (a_{11}-s)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \ldots + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22}-s)\gamma_2 + \ldots + a_{2n}\gamma_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \ldots + (a_{nn}-s)\gamma_n = 0. \end{cases}$$

A ces formules il faut adjoindre, pour achever de déterminer les $\gamma_{i\nu}$, l'équation (2), qui, en omettant l'indice ν, devient

$$(8)\qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \ldots + \gamma_n^2 = 1.$$

Si nous éliminons les γ entre les équations (7), nous aurons

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-s & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-s \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en appelant $F(s)$ le premier membre de cette équation

$$(9\ bis)\qquad F(s) = 0.$$

L'équation $F(s) = 0$ est du degré n ; si elle a ses n racines distinctes, en les appelant $s_1, s_2, \ldots, s_\nu, \ldots, s_n$, chacune de ces racines, portée dans le système (7), (8), fera connaître un système de valeurs des quantités $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, et le problème que nous avons en vue sera résolu. Mais il convient de soumettre cette solution à une discussion approfondie. L'équation $F(s) = 0$ est ce que l'on appelle l'*équation en s*.

DISCUSSION DE L'ÉQUATION EN s.

(Nous continuerons le numérotage des formules commencé au paragraphe précédent.)

Le polynôme $\Sigma a_{ij} x_i x_j$ sera supposé à coefficients réels. Cela posé :

Théorème I. — *L'équation en s a toutes ses racines réelles.*

Voici la première et la meilleure démonstration qui ait été donnée de ce théorème; elle est extraite de la *Mécanique analytique* de Lagrange, qui a rencontré pour la première fois l'équation en s dans l'étude du mouvement de rotation des solides.

Si l'équation $F(s) = 0$ avait des racines imaginaires, elle en aurait au moins deux conjuguées s_μ et s_ν, les valeurs de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ correspondantes, tirées de (7) et (8), étant désignées par $\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots, \gamma_{n\mu}$ et $\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots, \gamma_{n\nu}$; on aurait, en vertu de ces formules (7),

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} (a_{11} - s_\mu)\gamma_{1\mu} + a_{12}\gamma_{2\mu} + \ldots + a_{1n}\gamma_{n\mu} = 0, \\ a_{21}\gamma_{1\mu} + (a_{22} - s_\mu)\gamma_{2\mu} + \ldots + a_{2n}\gamma_{n\mu} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}\gamma_{1\mu} + a_{n2}\gamma_{2\mu} + \ldots + (a_{nn} - s_\mu)\gamma_{n\mu} = 0; \end{array}\right.$$

multipliant la première par $\gamma_{1\nu}$, la seconde par $\gamma_{2\nu}, \ldots$ et ajoutant, on a

$$\begin{array}{l} a_{11}\gamma_{1\mu}\gamma_{1\nu} + a_{21}(\gamma_{2\mu}\gamma_{1\nu} + \gamma_{2\nu}\gamma_{1\mu}) + \ldots \\ \quad = s_\mu(\gamma_{1\mu}\gamma_{1\nu} + \ldots + \gamma_{n\mu}\gamma_{n\nu}), \end{array}$$

on trouverait d'une façon analogue

$$\begin{array}{l} a_{11}\gamma_{1\mu}\gamma_{1\nu} + a_{21}(\gamma_{2\mu}\gamma_{1\nu} + \gamma_{2\nu}\gamma_{1\mu}) + \ldots \\ \quad = s_\nu(\gamma_{1\mu}\gamma_{1\nu} + \ldots + \gamma_{n\mu}\gamma_{n\nu}), \end{array}$$

d'où, par soustraction,

$$(s_\mu - s_\nu)(\gamma_{1\mu}\gamma_{1\nu} + \gamma_{2\mu}\gamma_{2\nu} + \ldots + \gamma_{n\mu}\gamma_{n\nu}) = 0;$$

mais s_μ et s_ν étant conjugués sont différents l'un de l'autre; de plus, $\gamma_{1\mu}$ et $\gamma_{1\nu}$, $\gamma_{2\mu}$ et $\gamma_{2\nu}, \ldots$ sont des imaginaires conjuguées : donc ni $s_\mu - s_\nu$, ni l'autre facteur $\gamma_{1\mu}\gamma_{1\nu} + \ldots + \gamma_{n\mu}\gamma_{n\nu}$, ne peuvent être nuls [en effet, $\gamma_{1\mu}$

et $\gamma_{1\nu}$ étant conjugués, leur produit est le carré du module de $\gamma_{1\mu}$, etc. Pour que $\Sigma\gamma_{i\mu}\gamma_{i\nu}$ fût nul, il faudrait que $\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots, \gamma_{n\mu}$ le fussent, ce qui est absurde, puisque, en vertu de (8), $\Sigma\gamma_{1\mu}^2 = 1$].

On arrive donc à une conclusion absurde en supposant que l'équation en s, $F(s) = 0$, a une racine imaginaire, ce qui établit le théorème énoncé.

Théorème II. — *Si* $F(s) = 0$ *n'a pas de racines égales, les* n *valeurs de* s *fourniront pour* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, n *systèmes de valeurs bien déterminées.*

En effet, les valeurs des rapports $\gamma_1 : \gamma_2 : \ldots : \gamma_n$ ne pourraient être mal déterminées et les valeurs de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ mal déterminées à l'aide de (8), que si tous les mineurs du déterminant $F(s)$ étaient nuls. Or [1], $F'(s)$ est la somme des mineurs de $F(s)$ au signe près, relatifs aux éléments $(a_{11} - s)$, $(a_{22} - s)$, ...; donc, si $\gamma_1 : \gamma_2 : \ldots : \gamma_n$ étaient mal déterminés, $F(s)$ et $F'(s)$ seraient nuls à la fois, et $F(s)$ aurait des racines multiples.

Il résulte de là que, si l'équation $F(s) = 0$ n'a pas de racines égales, la substitution orthogonale (1), dans laquelle les coefficients auront été calculés au moyen des formules (7) ou (10), ramènera le polynôme $f = \Sigma a_{ij} x_i x_j$ à une somme de n carrés; les coefficients $A_1, A_2, \ldots$ de $y_1^2, y_2^2, \ldots$ se calculeront comme il suit : si l'on multiplie la première formule (10) par $\gamma_{1\mu}$, la seconde par $\gamma_{2\mu}$, etc., et si l'on ajoute, on a

$$\Sigma a_{ij}\gamma_{i\mu}\gamma_{j\nu} - s_\mu(\gamma_{1\mu}^2 + \gamma_{2\mu}^2 + \ldots + \gamma_{n\mu}^2) = 0,$$

---

[1] En effet, pour prendre la dérivée de $F(s)$, on peut considérer cette fonction comme composée de $a_{11} - s$, $a_{22} - s$, ..., $a_{nn} - s$ et l'on a

$$F'(s) = -F'_{a_{11}-s} - F'_{a_{22}-s} - \ldots - F'_{a_{nn}-s};$$

les diverses parties de cette somme sont des mineurs de F.

ou, en vertu de (4) et de (8),

$$A_\mu - s_\mu = 0;$$

ainsi le polynôme f se réduit à

$$f = s_1 y_1^2 + s_2 y_2^2 + \ldots + s_n y_n^2,$$

DÉMONSTRATION D'UN LEMME POUR L'EXAMEN DU CAS OU L'ÉQUATION EN s A DES RACINES MULTIPLES.

Pour étudier le cas où l'équation en s a des racines égales, nous serons obligé de nous appuyer sur un lemme que nous allons établir.

Considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta.$$

Soit, en général, α_{ij} le coefficient de a_{ij} dans ce déterminant Δ; si l'on multiplie la formule précédente par celle-ci :

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \Delta',$$

en ayant égard aux relations

$$(a) \qquad a_{1i}\alpha_{1j} + a_{2i}\alpha_{2j} + \ldots + a_{ni}\alpha_{nj} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \gtrless j \\ \Delta \text{ si } i = j \end{cases},$$

on aura

$$\begin{vmatrix} \Delta & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Delta & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & \Delta \end{vmatrix} = \Delta\Delta'$$

ou

$$\Delta^n = \Delta\Delta';$$

donc

$$\Delta' = \Delta^{n-1}. \tag{b}$$

Pour représenter le coefficient de a_{ij} dans Δ, on peut considérer tous les éléments de Δ comme des variables indépendantes, et alors Δ sera une fonction du premier degré, par rapport à chaque élément pris individuellement. Le coefficient de a_{ij} sera alors la dérivée de Δ, prise par rapport à a_{ij} ; ainsi

$$\alpha_{ij} = \Delta'_{a_{ij}}, \tag{c}$$

que nous écrirons aussi

$$\alpha_{ij} = \Delta'(a_{ij})$$

pour éviter les superpositions d'indices ; de même le coefficient de a_{ij}, a_{kl} pourra être représenté par la dérivée de Δ prise par rapport à a_{ij} et a_{kl}. Ce coefficient sera donc

$$\Delta''(a_{ij}, a_{kl}),$$

et ainsi de suite.

Ceci posé, on a

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdot\ \cdot & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \Delta^{n-},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{34} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdots & \cdot\ \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot\ \cdot & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta''(a_{11}, a_{12}).$$

Multiplions ces formules membre à membre, en vertu des formules (a), nous aurons

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \dots & \alpha_{n2} \\ 0 & 0 & \Delta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = \Delta^{n-1}\Delta''(a_{11}, a_{22}),$$

c'est-à-dire

$$(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})\,\Delta^{n-1} = \Delta''(a_{11}, a_{12})\,\Delta^{n-1},$$

ce qui peut s'écrire, en vertu de (b) et (c),

$$\Delta'(a_{11})\,\Delta'(a_{22}) - \Delta'(a_{21})\,\Delta'(a_{12}) = \Delta\Delta''(a_{11}, a_{12})\;;$$

en permutant les lignes et les colonnes de Δ de manière que la $i^{\text{ième}}$ et la $k^{\text{ième}}$ ligne deviennent la première et la seconde, et de manière que la $j^{\text{ième}}$ colonne et la $l^{\text{ième}}$ deviennent la première et la seconde, on a

11) $$\Delta'(a_{ij})\,\Delta'(a_{kl}) - \Delta'(a_{il})\,\Delta'(a_{kj}) = \Delta\Delta''(a_{ij}, a_{kl}).$$

En multipliant entre eux les déterminants

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

et

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{41} & a_{42} & . & . & \dots & a_{4n} \\ \dots & \dots & . & . & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

on trouve

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \Delta^2\Delta'''(a_{11}, a_{22}, a_{33}),$$

ou plus généralement

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{ij} & \alpha_{kj} & \alpha_{pj} \\ \alpha_{il} & \alpha_{kl} & \alpha_{pl} \\ \alpha_{iq} & \alpha_{kq} & \alpha_{pq} \end{vmatrix} = \Delta^2 \Delta'''(a_{ij}, a_{kl}, a_{p2}).$$

On voit facilement comment on généraliserait.

CAS OU L'ÉQUATION EN s A DES RACINES ÉGALES.

THÉORÈME. — *Si l'équation en s a une racine double s_μ, tous les mineurs de* F(s) *ont la racine s_μ. En général, si l'équation en s a une racine s_μ d'ordre de multiplicité* M, *tous les mineurs de* F(s) *jusqu'à l'ordre* M — 1 *sont nuls pour $s = s_\mu$.*

En effet, si $F(s) = 0$ a une racine double s_μ, on aura à la fois $F(s) = 0$ et $F'(s) = 0$. Or, en vertu du théorème des fonctions composées, si l'on regarde $F(s)$ comme une fonction composée de $a_{11} - s$, $a_{22} - s, \ldots, a_{nn} - s$, l'équation $F'(s) = 0$ s'écrira

$$-F'(a_{11} - s) - F'(a_{22} - s) - \ldots - F'(a_{nn} - s) = 0;$$

en multipliant par $F'(a_{11} - s)$, on a

$$(13)\qquad \left\{ \begin{aligned} &[F'(a_{11} - s)]^2 + F'(a_{11} - s)\,F'(a_{22} - s) + \ldots \\ &\qquad + F'(a_{11} - s)\,F'(a_{nn} - s) = 0. \end{aligned} \right.$$

Or, en vertu de (11), on a

$$F.F''(a_{11} - s, a_{ii} - s) = F'(a_{n} - s)\,F'(a_{ii} - s) - [F'(a_{ii})]^2,$$

et, si l'on suppose $F = 0$,

$$F'(a_{11} - s)\,F'(a_{ii} - s) = [F'(a_{1i})]^2;$$

l'équation (13) peut alors s'écrire

$$(14)\qquad [F'(a_{11} - s)]^2 + [F'(a_{12})]^2 + \ldots + [F'(a_{1n})]^2 = 0,$$

d'où l'on conclut $F'(a_{11} - s) = 0$, $F'(a_{12}) = 0, \ldots$, et l'on verrait d'une façon analogue que tous les mineurs de premier ordre de F sont nuls.

D'ailleurs, si $F(s)$ admet le facteur $s - s_\mu$ trois fois, le premier membre de (13) l'admettra au moins trois fois aussi, ainsi que le premier membre de (14); on pourra donc le supprimer deux fois, et l'on voit que

$$\frac{F'(a_{11} - s)}{s - s_\mu}, \quad \frac{F'(a_{12})}{s - s_\mu}, \quad \ldots$$

s'annuleront encore pour $s = s_\mu$. On verrait de même que, si $F(s)$ admet M fois le facteur $s - s_\mu$, ses mineurs l'admettront $M - 1$ fois.

Ceci posé, en représentant, pour abréger, $F'(a_{ij})$ par α_{ij}, on a, en vertu de (11),

$$(15) \qquad \alpha_{ij}\alpha_{kl} - \alpha_{il}\alpha_{kj} = F.F''(a_{ij}, a_{kl});$$

or, si F admet trois fois le facteur $s - s_\mu$, les α_{ij} l'admettront chacun deux fois : le premier membre de cette formule l'admettra donc au moins quatre fois et, par suite, $F''(a_{ij}, a_{kl})$ l'admettra au moins une fois.

Donc, si $F(s)$ a une racine triple s_μ, ses mineurs d'ordre un et deux s'annuleront pour $s = s_\mu$.

Si F admet s_μ pour racine quadruple, ses mineurs seront divisibles par $(s - s_\mu)^3$ et, en vertu de (15), ses mineurs du second ordre seront divisibles par $(s - s_\mu)^2$. Mais la formule (12) appliquée à F donne

$$\begin{vmatrix} \alpha_{ij} & \alpha_{kj} & \alpha_{pj} \\ \alpha_{il} & \alpha_{kl} & \alpha_{pl} \\ \alpha_{iq} & \alpha_{kq} & \alpha_{pq} \end{vmatrix} = F^2 F'''(a_{ij}, a_{kl}, a_{pq});$$

le premier membre admet alors le facteur $(s - s_\mu)^9$. F^2 admet le facteur $(s - s_\mu)^8$: donc F''' admet le facteur $s - s_\mu$, et ainsi de suite.

Nous pouvons maintenant prouver d'une manière générale que le polynôme f est réductible en tout cas à une somme de n carrés par le moyen d'une substitution orthogonale.

En effet, supposons que l'équation $F(s) = 0$ admette s_μ pour racine d'ordre de multiplicité M : les équations (10) se réduiront à $n - M$ équations distinctes, puisque tous les mineurs de F, jusqu'à l'ordre $M - 1$ inclusivement, sont nuls, et que ceux de l'ordre M ne le sont pas tous. On peut donc assujettir les $\gamma_{i\mu}$ à $M - 1$ nouvelles relations; il y aura alors une infinité de manières de réduire f à une somme de carrés, et à la racine s_μ correspondront M coefficients A_μ égaux entre eux. En résumé, on peut énoncer le théorème suivant :

On peut toujours ramener le polynôme

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

à la forme

$$s_1 y_1^2 + s_2 y_2^2 + \ldots + s_n y_n,$$

au moyen d'une substitution orthogonale; $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sont alors les racines de l'équation en s; $F(s) = 0$.

UTILITÉ DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE.

D'après ce que l'on vient de voir, pour découvrir, pour ainsi dire sans calcul, en combien de carrés positifs, négatifs ou nuls on peut décomposer le polynôme $f = \Sigma a_{ij} x_i x_j$, on formera l'équation en s; le nombre de ses racines positives, négatives ou nulles sera le nombre des carrés positifs, négatifs ou nuls dans lesquels f pourra se décomposer; d'ailleurs, comme l'équation en s a toutes ses racines réelles, le théorème de Descartes nous montre que les racines positives sont en nombre égal à celui de ses variations : donc *le poly-*

nôme f est décomposable en autant de carrés positifs que $F(s)$ *présente de variations.*

Mais voici d'autres applications :

Pour que le polynôme f soit un produit de deux facteurs linéaires, il faut que l'équation en s ait $n-2$ racines nulles; en effet, alors le polynôme f se ramenant à la forme $A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2$ pourra aussi s'écrire

$$(\sqrt{A_1}y_1 + \sqrt{-A_2}y_2)(\sqrt{A_1}y_1 - \sqrt{-A_2}y_2).$$

Pour que le polynôme f soit un carré parfait, il faut que tous les coefficients de l'équation en s soient nuls, à l'exception des deux premiers.

QUELQUES MOTS SUR LA RÉDUCTION SIMULTANÉE DE DEUX POLYNÔMES A UNE SOMME DE CARRÉS.

Une substitution orthogonale n'altérant pas une somme de n carrés, en d'autres termes, $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ devenant $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$ par une substitution orthogonale, il en résulte que l'on peut toujours, au moyen de deux substitutions orthogonales successives, ramener simultanément deux fonctions du second degré à des sommes de carrés. En effet, considérons les deux fonctions à n variables

$$f = \Sigma a_{ij} x_i x_j, \quad g = \Sigma b_{ij} x_i x_j,$$

effectuons la substitution orthogonale qui ramène f à la forme $s_1 y_1^2 + \ldots + s_n y_n^2$, en posant $y_1 = \frac{z_1}{\sqrt{s_1}}$, $y_2 = \frac{z_2}{\sqrt{s_2}}, \ldots$; la fonction f sera ramenée à la forme $z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2$, et la fonction g pourra être représentée par $\Sigma c_{ij} z_i z_j$. Si maintenant on effectue une nouvelle substitution orthogonale, celle qui ramène $\Sigma c_{ij} z_i z_j$ à une somme de carrés $A_1 t_1^2 + \ldots + A_n t_n^2$, f prendra la forme

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2,$$

puisque la définition même de la substitution orthogonale est de conserver leur forme aux fonctions

$$z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2.$$

La méthode que nous venons d'indiquer tombera en défaut quand f et g seront à la fois des sommes de moins de n carrés, parce qu'alors la substitution $y = \frac{z}{\sqrt{s_1}}, \ldots$ sera illusoire, l'une des quantités s_1 s'annulant. Mais alors f et g ne sont plus, à proprement parler, des fonctions de n variables, et c'est sur les variables effectives, c'est-à-dire réduites à leur minimum, que l'on effectuera les substitutions orthogonales dont il a été question.

Comme on le voit, la substitution unique qui revient aux deux substitutions orthogonales que l'on est obligé de faire ne sera pas toujours réelle, puisque l'on doit remplacer y_1 par $\frac{z_1}{\sqrt{s_1}}, \ldots$ et que $s_1, s_2, \ldots$ peuvent être négatifs; mais on voit qu'elle sera réelle *si l'une des formes f ou g est une somme de carrés tous positifs ou tous négatifs*.

La possibilité de réduire deux formes à des sommes de carrés étant établie, voici comment il conviendra de procéder dans la pratique.

On effectuera sur f et sur g la substitution (1) sans la supposer orthogonale, c'est-à-dire sans supposer les relations (2) et, pour ramener f et g à des sommes de carrés, on posera, comme on a fait plus haut pour f seul,

$$(16) \qquad \Sigma a_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} = 0, \quad \Sigma b_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\nu} = 0,$$

$$(17) \qquad \Sigma a_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\mu} = A_\mu, \quad \Sigma b_{ij} \gamma_{i\mu} \gamma_{j\mu} = B_\mu;$$

en appelant alors $f_1, f_2, \ldots$ les demi-dérivées de

$$f(\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots),$$

prises par rapport à $\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots,$ et $g_1, g_2, \ldots$ celles de $g(\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots)$ par rapport aux mêmes variables $\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots,$ les formules (16) et (17) s'écriront

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} &f_1\gamma_{1\nu} + f_2\gamma_{2\nu} + \ldots + f_n\gamma_{n\nu} = 0,\\ &g_1\gamma_{1\nu} + \ldots + g_n\gamma_{n\nu} = 0,\\ &f_1\gamma_{1\mu} + f_2\gamma_{2\mu} + \ldots + f_n\gamma_{n\mu} = A_\mu,\\ &g_1\gamma_{1\mu} + \ldots + g_n\gamma_{n\mu} = B_\mu,\end{aligned}\right.$$

ou

$$(19)\qquad f(\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots) = A_\mu, \quad g(\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots) = B_\mu.$$

Des équations (18) on tire

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} = \ldots = \frac{f_n}{g_n},$$

et, si l'on désigne par λ cette suite de rapports égaux, on aura, pour déterminer $\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots, \gamma_{n\mu}$, les équations

$$f_1 - g_1\lambda = 0, \quad f_2 - g_2\lambda = 0, \quad \ldots, \quad f_n - g_n\lambda = 0,$$

que l'on peut écrire

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &(a_{11} - \lambda b_{11})\gamma_{1\mu}\\ &\qquad + (a_{12} - \lambda b_{12})\gamma_{2\mu} + \ldots + (a_{1n} - \lambda b_{1n})\gamma_{n\mu} = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &(a_{n1} - \lambda b_{n1})\gamma_{1\mu}\\ &\qquad + (a_{n2} - \lambda b_{n2})\gamma_{2\mu} + \ldots + (a_{nn} - \lambda b_{nn})\gamma_{n\mu} = 0.\end{aligned}\right.$$

Pour les résoudre, on formera l'équation en λ

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} - \lambda b_{12} & \ldots & a_{1n} - \lambda b_{1n}\\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{22} - \lambda b_{22} & \ldots & a_{2n} - \lambda b_{2n}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ a_{n1} - \lambda b_{n1} & a_{n2} - \lambda b_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda b_{nn}\end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation a n racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu, \ldots, \lambda_n$. Ces racines portées dans les équations (20) feront connaître les rapports des quantités $\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots$ à l'une d'elles; on achèvera de les déterminer, si l'on veut, en se donnant A_1, $A_2, \ldots, A_n$.

Chaque racine de l'équation en λ faisant connaître un groupe des quantités $\gamma_{1\mu}, \gamma_{1\mu}, \ldots$, le problème sera résolu.

Si l'on multiplie les équations (20) par $\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots$ respectivement et si on les ajoute, on trouve, en remplaçant λ par λ_μ,

$$f(\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots) - \lambda_\mu g(\gamma_{1\mu}, \gamma_{2\mu}, \ldots) = 0,$$

ou

$$A_\mu = s_\mu B_\mu.$$

Ainsi, en résumé, *pour ramener simultanément deux formes à des sommes de carrés, on peut se donner arbitrairement la forme réduite de l'une*

$$B_1 y_1^2 + B_2 y_2^2 + \ldots + B_n y_n^2,$$

et l'autre sera alors

$$B_1 \lambda_1 y_1^2 + B_2 \lambda_2 y_2^2 + \ldots + B_n \lambda_n y_n^2,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *étant les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le déterminant dont les éléments sont les coefficients des dérivées de* $f - \lambda g$.