Nouvelles annales de mathématiques

Le Cointe

Lieu des points de rencontre des tangentes communes à une conique et à un cercle

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 19 (1880), p. 122-133

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1880_2_19__122_1>

LIEU DES POINTS DE RENCONTRE DES TANGENTES COMMUNES A UNE CONIQUE ET A UN CERCLE;

PAR LE P. LE COINTE, S. J.

Par deux points donnés sur une conique, on fait passer une circonférence quelconque variable, puis on mène à ces deux courbes des tangentes communes : trouver le lieu géométrique des points de rencontre de ces tangentes considérées deux à deux.

Cette question a été traitée à diverses reprises dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (¹), mais les géomètres qui s'en sont occupés l'ont toujours résolue en admettant que les deux tangentes communes dont on demande le lieu du point de rencontre sont choisies de telle sorte que leurs deux cordes de contact avec la conique donnée et avec le cercle variable concourent en un même point de la droite joignant les deux points donnés sur cette conique. Comme cette hypothèse ne se réalise qu'autant que l'on fait un choix convenable des deux tangentes considérées parmi les quatre tangentes communes à la conique et au cercle, les solutions susdites sont incomplètes et ne nous paraissent nullement répondre au désir exprimé autrefois par Terquem (²).

(¹) 2ᵉ série, t. II, p. 481 (année 1863), solution de MM. Mister et Neuberg. — 2ᵉ série, t. III, p. 49 (année 1864), solution de M. P. Serret. — 2ᵉ série, t. XII, p. 23 (année 1873), solution de M. Doucet. — 2ᵉ serie, t. XIX, p. 91 (année 1880), solution de M. Macé de Lépinay.

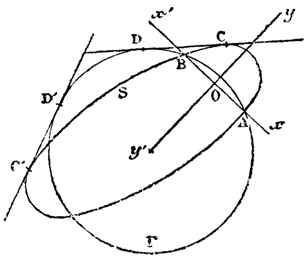
(²) *Nouvelles Annales*, 1ʳᵉ série. t. X, p. 411.

La manière dont nous allons présenter la solution de la question nous semble ne rien laisser à désirer.

Solution. — Désignons par S la conique donnée, par A et B les deux points donnés sur cette conique et par Γ la circonférence variable passant par ces deux points.

Prenons pour axe des x la droite tracée par les deux

Fig. 1.



points A et B, et pour axe des y la perpendiculaire à cette droite menée par le point O, milieu de la distance AB.

Si l'on pose $OA = OB = p$, les équations des deux courbes S et Γ peuvent s'écrire respectivement

$$(S)\qquad x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey - p^2 = 0,$$

$$(\Gamma)\qquad x^2 + y^2 - 2dy - p^2 = 0,$$

et, dans ces équations, tous les coefficients sont supposés donnés, sauf d, qui est variable.

Soient α, β les coordonnées d'un point du lieu.

On sait que l'équation des deux tangentes à S issues de ce point (α, β) est

$$\begin{aligned}(\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + 2E\beta - p^2)(x^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Ey - p^2)\\ - [(\alpha + B\beta)x + (B\alpha + C\beta + E)y + (E\beta - p^2)]^2 = 0,\end{aligned}$$

et que l'équation des deux tangentes à Γ issues de ce même point est

$$(\alpha^2 + \beta^2 - 2d\beta - p^2)(x^2 + y^2 - 2dy - p^2)$$
$$- [\alpha x + (\beta - d)y - (d\beta + p^2)]^2 = 0.$$

Comme ces deux couples de tangentes partent du même point (α, β), pour exprimer que ces deux couples n'en font qu'un, il suffit d'exprimer que les coefficients des termes en x^2, xy et y^2, dans ces deux équations, sont respectivement proportionnels ([1]). On a ainsi égalité entre trois rapports, ou, si l'on veut, en désignant par K la valeur commune de ces rapports, on a les trois équations

$$(1) \qquad (C - B^2)\beta^2 + 2E\beta - p^2 = K(\beta^2 - 2d\beta - p^2),$$
$$(2) \quad (B^2 - C)\alpha\beta + BE\beta - E\alpha - Bp^2 = K\alpha(d - \beta),$$
$$(3) \quad (C - B^2)\alpha^2 - 2BE\alpha - E^2 - Cp^2 = K(\alpha^2 - p^2 - d^2),$$

entre les indéterminées K et d.

Si l'on remarque que le second membre de l'équation (1) peut s'écrire

$$- K[\beta(d - \beta) + (d\beta + p^2)],$$

on voit de suite qu'en ajoutant les équations (1) et (2), après avoir multiplié les deux membres de la seconde par $\frac{\beta}{\alpha}$, il vient

$$E\alpha\beta + BE\beta^2 - p^2\alpha - Bp^2\beta = - K\alpha(d\beta + p^2),$$

c'est-à-dire

$$(4) \qquad (E\beta - p^2)(\alpha + B\beta) = - K\alpha(d\beta + p^2).$$

Nous substituerons cette équation à l'équation (1),

([1]) En ecrivant que les deux couples de tangentes coupent l'axe des x au même point, le calcul est plus rapide et on obtient l'equation (4) sans transformation. CH. B.

c'est-à-dire que nous considérerons le système des trois équations (2), (3) et (4).

Pour avoir le lieu demandé, il suffit d'éliminer K et d entre ces trois équations. En divisant les équations (2) et (4) membre à membre, on aura une équation du premier degré en d qui fournira la valeur de cette indéterminée en fonction des coordonnées α, β, et, portant cette valeur dans l'équation qui est le résultat des deux équations (2) et (3) divisées membre à membre, on aura l'équation du lieu, que nous désignerons ici par

$$(5) \qquad \Phi(\alpha, \beta) = 0 \quad (^1).$$

Sans nous arrêter davantage, pour le moment, à cette équation générale, qui est du sixième degré en α, β, nous allons étudier plus particulièrement une partie du lieu qu'elle représente.

Lorsqu'une conique quelconque Σ est doublement tangente à deux autres, que nous supposerons être S et Γ, on sait que les deux cordes de contact vont concourir en un certain point qui est le point de rencontre de deux autres droites constituant un système de sécantes communes à ces deux coniques S et Γ. Or, le couple des deux tangentes communes aux deux coniques S et Γ, que nous avons considérées issues du point (α, β), constitue une ligne du second ordre doublement tangente à ces deux coniques, et, par suite, nous pouvons nous proposer de chercher le *lieu des points* (α, β) *pour lesquels les deux*

---

(1) Si l'on représente respectivement par M_1, M_2, M_3 les premiers membres des équations (2), (3), (4), cette équation (5) peut s'ecrire

$$\alpha(\beta M_1 + M_3)[\alpha(\beta M_1 + M_3) + (p^2 + \beta^2) M_2] = (p^2 + \beta^2)(M_3^2 + p^2 M_1^2),$$

et, dans cette équation, l'expression

$$\alpha(\beta M_1 + M_3) + (p^2 + \beta^2) M_2$$

n'est que du second degre en α, β. (*Voir* la seconde Note ci-après.)

lignes de contact des deux tangentes communes issues de chacun de ces points vont concourir en un même point de la sécante AB (axe des x), *commune aux deux coniques* S *et* Γ (¹).

Les équations des deux lignes de contact en question sont respectivement

$$(\alpha + B\beta)x + (B\alpha + C\beta + E)y + (E\beta - p^2) = 0,$$
$$\alpha x + (\beta - d)y - (d\beta + p^2) = 0,$$

et, pour que ces deux lignes rencontrent la droite AB, c'est-à-dire l'axe des x, en un même point, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{p^2 - E\beta}{\alpha + B\beta} = \frac{d\beta + p^2}{\alpha},$$

d'où l'on tire

$$(6) \qquad d\beta + p^2 = \frac{\alpha(p^2 - E\beta)}{\alpha + B\beta},$$

$$(7) \qquad d = -\frac{E\alpha + Bp^2}{\alpha + B\beta}.$$

Portant la valeur (6) de $d\beta + p^2$ dans l'équation (4), il vient

$$(8) \qquad K = \frac{(\alpha + B\beta)^2}{\alpha^2}.$$

Maintenant, si l'on substitue les valeurs précédentes de K et d dans l'une et l'autre des équations (2) et (3), et si, pour abréger, on désigne l'expression

$$(B^2 - C + 1)\alpha^2 + 2B\alpha\beta + B^2\beta^2 + 2BE\alpha + B^2p^2$$

par $F(\alpha, \beta)$, il vient respectivement, pour résultats de

(¹) C'est la forme sous laquelle M. Macé de Lépinay a résolu la question (*loc. cit.*).

ces substitutions ([1]), les deux équations

$$\beta F(\alpha, \beta) = 0, \quad (\alpha^2 - p^2) F(\alpha, \beta) = 0,$$

lesquelles doivent être vérifiées simultanément par les coordonnées α, β de tout point du lieu cherché; d'où il suit que les points de ce lieu sont d'abord tous les points de la conique représentée par l'équation

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} F(\alpha, \beta) = (&B^2 - C + 1)\alpha^2 \\ &+ 2B\alpha\beta + B^2\beta^2 + 2BE\alpha + B^2p^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

et, de plus, les deux points fournis par le système des deux équations

$$\alpha^2 - p^2 = 0, \quad \beta = 0,$$

c'est-à-dire les deux points A et B.

On se rend parfaitement compte de l'existence de ces deux points comme faisant partie du lieu en question en jetant les yeux sur la *fig.* 1, où sont tracées les deux tangentes communes CD, C'D' à la conique S et au cercle Γ, C et D étant les points de contact de la première et C', D' ceux de la seconde. Si l'on fait varier le cercle Γ de manière qu'il tende à devenir tangent en B à la conique S, alors les deux droites CD et C'D' tendront à se confondre avec la tangente en B à cette conique, et leur point de rencontre tendra lui-même vers B comme position limite. Quant aux deux cordes de contact CC', DD', elles tendront aussi à s'identifier avec la tangente en B à la conique S. Ainsi le point B est bien un point du lieu cherché. Il en est de même du point A ([2]).

Relativement à l'équation (9), comme tout système de valeurs de α, β qui vérifient cette équation est aussi une solution de l'équation (5), le premier membre de

---

([1]) *Voir* la première Note ci-après.

([2]) Cette explication est singulièrement contestable. CH. B.

cette équation (9) doit être un diviseur de la fonction $\Phi(\alpha, \beta)$, ce qui amène ainsi la décomposition de l'équation (5) en deux autres, *l'une du second degré*, qui est l'équation (9), et *l'autre du quatrième degré*. Cette décomposition sera donnée dans la seconde Note ci-après.

La conique (9) se réduit à une seule droite, qui est l'axe des y, si l'on a $B = 0$; et, comme cela a lieu tant que C est $\gtrless 1$, on peut en conclure qu'il en est encore ainsi pour $C = 1$; dans cette circonstance la conique S est un cercle.

Si $B \gtrless 0$, la conique (9) est une *ellipse*, une *hyperbole* ou une *parabole*, selon qu'on a

$$B^2 - C > \text{ ou } < \text{ ou } = 0,$$

c'est-à-dire selon que la conique S est une *hyperbole*, une *ellipse* ou une *parabole*.

Pour que la conique (9) fût un système de deux droites, on devrait avoir

$$p^2(B^2 - C) = E^2, \tag{10}$$

ce qui entraînerait $B^2 - C > 0$. Mais alors la conique (9) ne serait qu'un système de deux droites imaginaires, ou plutôt elle serait réduite à un seul point réel, et cela ne peut avoir lieu ici, car, si l'on pose $B^2 - C = l^2$, l^2 désignant une quantité positive quelconque, l'équation de la conique S devient

$$x^2 + 2Bxy + (B^2 - l^2)y^2 + 2Ey - \frac{E^2}{l^2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$l^2(x + By)^2 - (l^2y - E)^2 = 0.$$

Cette conique S serait donc elle-même un système de deux droites, ce qu'on ne suppose pas dans la question traitée ci-dessus.

La relation (10) se présenterait si l'on avait $p=0$, $E=0$, ou bien $C=B^2$, $E=0$; mais, dans ces deux cas la conique S ne serait plus qu'un système de deux droites.

PROPRIÉTÉS RELATIVES A LA CONIQUE (9).

I. *La conique* (9) *et la conique* S *sont homofocales.* Car, si l'on désigne par (ξ, η) les coordonnées d'un foyer de la conique S et par $f(x,y)$ le premier membre de l'équation de cette conique, on a les deux relations

$$4(1-C)f(\xi,\eta)=f_\xi'^2-f_\eta'^2,\quad 4Bf(\xi,\eta)=f'_\xi f'_\eta,$$

c'est-à-dire

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &(B^2-C)(\eta^2-\xi^2)-2BE\xi\\ &\qquad\qquad -2E\eta-E^2+p^2(1-C)=0,\\ &(B^2-C)\xi\eta-E\xi+BE\eta-Bp^2=0.\end{aligned}\right.$$

Or, on sait aussi que la condition nécessaire et suffisante pour que le point (ξ, η) soit un foyer de la conique (9) est que l'on ait les deux relations

$$4(1-C)F(\xi,\eta)=F_\xi'^2-F_\eta'^2,\quad 4BF(\xi,\eta)=F'_\xi F'_\eta,$$

et l'on vérifie sans peine que ces deux relations ne sont autres que les relations (11). Donc, etc.

II. La conique S étant supposée fixe, invariable, traçons une corde quelconque parallèle à la droite AB, et soit $y=\lambda$ l'équation de cette corde.

Désignons par x_0, y_0 les coordonnées du point O', milieu de cette corde. L'équation qui donne les abscisses des points de rencontre A' et B' de cette droite $y=\lambda$ avec la conique S est

$$x^2+2B\lambda x+C\lambda^2+2E\lambda-p^2=0,$$

et, par suite, on a $x_0=-B\lambda$; d'ailleurs $y_0=\lambda$.

Transportons les axes des coordonnées parallèlement à eux-mêmes en ce point (x_0, y_0); l'équation de la conique S devient, en y faisant $x = X - B\lambda$, $y = Y + \lambda$,

$$\begin{aligned} & X^2 + 2BXY + CY^2 \\ & \quad + 2[(C - B^2)\lambda + E]Y + (C - B^2)\lambda^2 + 2E\lambda - p^2 = 0, \end{aligned}$$

et par suite, si l'on résout la question précédente relativement à la même conique S et en substituant la corde A′B à la corde AB, la conique qui correspondra à la conique (9) aura pour équation, par rapport au nouveau système d'axes de coordonnées,

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} & (B^2 - C + 1)X^2 + 2BXY + B^2Y^2 \\ & \quad + 2B[(C - B^2)\lambda + E]X + B^2[p^2 - 2E\lambda - (C - B^2)\lambda^2] = 0. \end{aligned} \right.$$

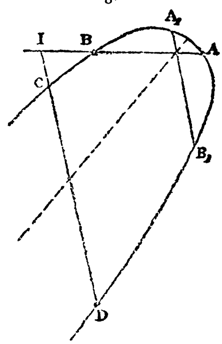
Si l'on revient au système primitif d'axes de coordonnées, cette équation (12) se transforme en l'équation (9), d'où résulte cette propriété que, *relativement au lieu géométrique, objet de la question traitée précédemment, la partie de ce lieu consistant en la conique* (9) *ne change pas si la corde* AB *se déplace parallèlement à elle-même dans la conique* S *supposée fixe, invariable.*

III. Dans la conique S, considérons la corde A_1B_1, symétrique de AB par rapport à l'axe focal, et traçons dans cette même conique une corde quelconque CD parallèle à A_1B_1. Soit I le point où elle rencontre AB.

Désignons par S′ la conique (9) et par S'_1 la nouvelle conique qui serait substituée à celle-là si l'on remplaçait les deux points fixes A et B par A_1 et B_1 ou, ce qui revient au même d'après la propriété précédente, par C et D. Je dis que *ces deux coniques* S′ *et* S'_1 *n'en font qu'une.*

En effet, la corde CD étant parallèle à A_1B_1, droite symétrique de AB par rapport à l'axe focal, on sait que

Fig. 2.



les quatre points A, B, C, D appartiennent à un même cercle Γ_1, et, comme cette corde CD a été menée quelconque parallèlement à A_1B_1, on peut obtenir ainsi une infinité de cercles Γ_2, Γ_3, ... tels que Γ_1, passant chacun par les deux points A et B et en même temps par les extrémités d'une corde de la conique S parallèle à A_1B_1. Or, si nous considérons la conique S et l'un de ces cercles, par exemple Γ_1, AB et CD sont un système de sécantes communes à ces deux courbes, et il y a un couple de tangentes communes à ces deux mêmes courbes pour lesquelles les deux cordes de contact concourent en I. Le point M d'intersection de ces deux tangentes est alors un point de S' et aussi de S'_1. Ces deux coniques S' et S'_1 se trouvent ainsi avoir une infinité de points communs; donc elles se confondent.

Les deux dernières des trois propriétés précédentes ont été indiquées par MM. Mister et Neuberg et par M. Macé de Lépinay (*loc. cit.*); mais leurs démonstrations sont différentes de celles que nous venons de donner.

Première Note. — Lorsqu'on porte les valeurs de K et de d dans l'équation (3), il vient d'abord

$$(B^2 - C + 1)\alpha^4 + 2B\alpha^3\beta + B^2\alpha^2\beta^2 + 2BE\alpha^3$$
$$= (1 - C)p^2\alpha^2 + 2Bp^2\alpha\beta + B^2p^2\beta^2 + 2BEp^2\alpha + B^2p^4,$$

et, ajoutant aux deux membres de cette dernière équation la quantité $B^2p^2\alpha^2$, elle peut s'écrire

$$[(B^2 - C + 1)\alpha^2 + 2B\alpha\beta$$
$$+ B^2\beta^2 + 2BE\alpha + B^2p^2](\alpha^2 - p^2) = 0.$$

Seconde Note. — L'équation (5) étant développée, si l'on divise son premier membre par celui de l'équation (9), on obtient pour seconde équation, qui avec cette dernière représente les deux courbes constituant le lieu de l'équation (5),

$$(13)\quad \left\{ \begin{array}{l} r^2[p^2 - (B^2 - C)\beta^2]\alpha^2 \\ \quad - 2Bp^2(E\beta - p^2)\alpha\beta - (\beta^2 + p^2)(E\beta - p^2)^2 = 0. \end{array} \right.$$

Relativement à la courbe du quatrième degré, représentée par cette dernière équation (13), nous nous bornerons aux indications suivantes :

1° Si $B^2 - C$ est > 0, elle a deux asymptotes parallèles à l'axe des x, lesquelles sont représentées par les équations

$$y = \pm \frac{p}{\sqrt{B^2 - C}},$$

et elle n'en a aucune autre.

De plus, selon qu'on a

$$(B^2 - C)p^4 - (C + 1)E^2p^2 - E^4 < \text{ ou } = \text{ ou } > 0,$$

le point dont les coordonnées sont $0, \dfrac{p^2}{E}$ est un point double ordinaire, ou un point de rebroussement, ou un point isolé de la courbe.

2° Si $B^2 - C$ est < 0, la courbe n'a pas d'autres asymptotes que les deux droites représentées par les équations

$$y = \frac{pR}{E}x + \frac{p(pR - BE)}{ER}, \quad y = -\frac{pR}{E}x + \frac{p(pR + BE)}{ER},$$

dans lesquelles R désigne la racine carrée positive de la quantité $C - B^2$.

3° Si $B^2 - C = 0$, elle n'a aucune asymptote réelle située à distance finie.

4° Dans le cas de $B^2 - C \leqq 0$, le point dont les coordonnées sont $0, \frac{p^2}{E}$ est un point double ordinaire de la courbe.

5° La courbe rencontre l'axe des x aux deux points A et B et en aucun autre point réel ([1]). Nous trouvons ici ces deux points comme faisant partie du *lieu* représenté par l'équation (13), parce que, supposant, par exemple, que le cercle variable Γ tende à devenir tangent en B à la conique S, du moment qu'il n'est pas considéré dans cette position limite, les deux tangentes CD et C'D' dont il a été question ci-dessus donnent toujours un point de rencontre qui appartient à ce *lieu*.