Nouvelles annales de mathématiques

Worms de Romilly

Sur l'équation du second ordre $Myy'' + Ny'^2 = f(x)$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 77-85

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__77_0>

SUR L'ÉQUATION DU SECOND ORDRE
$Myy'' + Ny'^2 = f(x)$
(Solution de la question 1289);

Par M. WORMS DE ROMILLY,
Ingénieur des Mines.

Lorsque les coefficients M et N de l'équation

$$(1)\qquad Myy'' + Ny'^2 = f(x)$$

ont pour valeurs $M = 3$, $N = -2$, et que $f(x)$ est un polynôme du second degré, on sait ramener l'intégration de cette équation à des quadratures

$$\int \frac{du}{u\sqrt{\Delta + 4\alpha u - u^3}},\quad \int f_1(x)\,dx,$$

Δ étant une certaine fonction des coefficients de $f(x)$ et α une constante arbitraire.

Nous nous proposons d'examiner à quelles conditions doivent satisfaire les coefficients et le second membre de l'équation différentielle (1) pour que le problème puisse être ramené à l'intégration d'une expression de la forme

$$(2)\qquad \frac{du}{\sqrt{\varphi + C\psi}} = F(x)\,dx,$$

φ et ψ étant des fonctions de u, et C une constante arbitraire.

Mettons l'équation proposée sous une autre forme en y, remplaçant y par $uf^n(x)$, u étant une nouvelle fonction de x; en effectuant les calculs, on trouve

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & uu'' + \frac{N}{M}u'^2 + \frac{2n(M+N)}{M}\frac{f'}{f}uu' \\ & + \frac{[Mn(n-1)+Nn]f'^2 + Mnff''}{Mf^2}u^2 - \frac{f^{1-2n}}{M} = 0. \end{aligned}\right.$$

Prenons la relation (2), nous pouvons en déduire une seconde équation en différentiant les deux membres par rapport à x; éliminons la constante arbitraire C entre ces deux équations, il vient

$$(4)\qquad uu'' - \frac{\psi' u}{2\psi} u'^2 - \frac{F'}{F} uu' - \frac{F^2}{2}\left(\varphi' - \frac{\varphi\psi'}{\psi}\right) u = 0,$$

dans laquelle φ' et ψ' représentent les dérivées de φ et de ψ par rapport à u, tandis que les autres dérivées sont prises par rapport à x. Nous devons chercher les conditions nécessaires pour que les équations (3) et (4) soient identiques.

Le coefficient de u'^2 doit être indépendant de u; il faut donc, en désignant par a le rapport $-\frac{N}{M}$, que

$$(5)\qquad \frac{\psi' u}{\psi} = 2a, \quad \psi = u^{2a} = u^{-\frac{2N}{M}}.$$

Les troisièmes termes donneront la relation

$$\frac{2n(M+N)}{M}\frac{f'}{f} = -\frac{F'}{F},$$

c'est-à-dire, en désignant par A une constante arbitraire,

$$(6)\qquad F = A f^{-\frac{2n(M+N)}{M}},$$

qui déterminera F en fonction de f.

Sur les termes suivants, nous pouvons faire plusieurs hypothèses; mais, en tout cas, il faut toujours que $\frac{f^{1-2n}}{M}$ et $\frac{F^2}{2}$ soient égaux, et, comme nous avons déjà trouvé entre ces deux quantités la relation (6), on voit qu'il faudra satisfaire aux équations de condition

$$1 - 2n = \frac{4n(M+N)}{M}; \quad \frac{1}{M} = \frac{A^2}{2},$$

d'où l'on tire

$$(7) \qquad n = -\frac{M}{2(M+2N)}, \quad A = \sqrt{\frac{2}{M}}.$$

I. (a) Supposons que

$$(8) \qquad [M(n-1)+Nn]f'^2 + Mff'' = 0;$$

la fonction f sera de la forme

$$(9) \qquad f = (Bx+H)^{-\frac{2(M+2N)}{M+N}},$$

d'où l'on tire, pour F, la valeur $\sqrt{\frac{2}{M}}(Bx+H)^{-2}$.

Nous devrons, en outre, satisfaire à la relation

$$u\left(\varphi' - \varphi\frac{\psi'}{\psi}\right) = 1 = u\varphi' - 2a\varphi,$$

en remplaçant ψ par sa valeur (5). Cette équation s'intègre facilement et donne

$$\varphi = \gamma u^{2a} - \frac{1}{2a}.$$

Nous voyons donc que l'équation

$$(10) \qquad Myy'' + Ny'^2 = (Bx+H)^p$$

se ramène à des quadratures de la forme (2), en posant

$$y = u(Bx+H)^{\frac{M}{M+N}},$$

$$a = -\frac{N}{M}, \quad \varphi + C\psi = u^{2a}(\gamma + C) - \frac{1}{2a},$$

lorsque p satisfera à l'équation de condition que l'on trouve en égalant les exposants des seconds membres des équations (9) et (10), et qui peut se mettre sous la forme

$$M(p+2) + N(p+4) = 0.$$

(b) Si les coefficients M et N satisfont à la condition

$$M + N = 0,$$

la relation (8) donnera, pour f, une expression de la forme

$$e^{Bx+H};$$

la valeur de φ sera d'ailleurs encore donnée par la même relation que dans le cas précédent et F sera une constante. On aura donc

$$Myy'' + Ny'^2 = e^{Bx+H}, \quad y = ue^{\frac{Bx+H}{2}}, \quad F = \sqrt{\frac{2}{M}},$$

$$a = 1, \quad \varphi + C\psi = u^2(\gamma + C) - \frac{1}{2}, \quad M + N = 0.$$

(c) L'équation (8) est encore satisfaite dans le cas où $f(x)$ est une constante K; on a alors

$$F = \sqrt{\frac{2}{M}} K^{\frac{M+N}{M+2N}}, \quad y = uK^{-\frac{M}{2(M+2N)}},$$

et φ sera encore donné par la même relation.

II. Cherchons maintenant à identifier les derniers termes des équations (3) et (4) sans supposer nul le coefficient de u^2. Il faudra avoir

$$(11) \quad \begin{cases} \dfrac{[Mn(n-1) + Nn^2]f'^2 + Mnff''}{Mf^2} u^2 - \dfrac{f^{1-2n}}{M} \\ \quad = -\dfrac{F^2}{2}\left(\varphi' - \varphi\dfrac{\psi'}{\psi}\right)u. \end{cases}$$

Comme f et F ne sont fonctions que de x, et que φ et ψ ne sont fonctions que de u, cette identité ne peut avoir lieu que si les trois équations

$$\frac{F^2}{2} = \frac{f^{1-2n}}{M} = -\frac{[Mn(n-1) + Nn^2]f'^2 + Mnff''}{M\alpha f^2},$$

$$\left(\varphi' - \varphi\frac{\psi'}{\psi}\right)u = \alpha u^2 + 1,$$

ou, en tenant compte des relations (5), (6) et (7),

$$(12)\qquad u\varphi' - 2a\varphi = \alpha u^2 + 1,$$

$$(13)\qquad [Mn(n-1) + Nn^2]f'^2 + Mnff'' + \alpha f^{3-2n} = 0.$$

(d) Prenons d'abord le cas où

$$M(n-1) + Nn = 0,$$

qui nous donne avec (7) l'équation de condition

$$3M + 5N = 0.$$

L'équation (13) se réduit, en remplaçant n, M par leurs valeurs en fonction de M, à

$$(14)\qquad \frac{25}{6}Nf'' + \alpha f^{-3} = 0,$$

qui donne

$$(15)\qquad f^2 = (Bx + D)^2 - \frac{6\alpha}{25NB^2},$$

et φ, déduit de l'équation (12), est égal à

$$\varphi = \gamma u^{2a} - \frac{1}{2a} + \frac{\alpha u^2}{2(1-a)},$$

a étant égal à $\frac{3}{5}$; on peut disposer de α de manière que le second membre de la relation (15) soit la racine carrée d'un trinôme quelconque du second degré, et il faudra substituer à α cette valeur déterminée dans l'expression de $\varphi + C\psi$, qui est

$$\varphi + C\psi = u^{\frac{3}{5}}(\gamma + C) + \frac{5}{4}\alpha u^2 - \frac{5}{3}.$$

Il est possible de satisfaire à l'équation (13) en prenant pour f une puissance p d'un polynôme entier $\theta(x)$; en effectuant la substitution, on trouve

$$(16)\qquad [(M+N)n^2p^2 - Mnp]\theta'^2 + Mnp\,\theta\theta'' + \alpha\theta^{p+2-2np} = 0.$$

Pour que cette équation soit satisfaite, il faut que θ soit au plus du second degré; car, si l'on désigne par m le degré de θ, le premier membre est du degré $2m-2$ et le second membre a pour degré un multiple de m. L'équation $2m-2 \mathrel{\overline{\gtrless}} m'm$ n'admet que les solutions entières

$$\left\{\begin{array}{l} m'=0,\\ m=1,\end{array}\right. \quad m=2, \quad \left\{\begin{array}{l} m'=1,\\ m=2.\end{array}\right.$$

Posons donc

$$\theta(x) = Bx^2 + Dx + E.$$

La relation (16) donne, en prenant, pour abréger,

$$(M+N)n^2p^2 - Mnp = \rho, \quad Mnp = \sigma,$$

$$(17) \quad \left\{\begin{array}{l} \rho(2Bx+D)^2 + 2B\sigma(Bx^2+Dx+E) \\ \qquad + \alpha(Bx^2+Dx+E)^{p+2-2np} = 0, \end{array}\right.$$

avec l'une des conditions

$$(18) \qquad p - 2np + 2 = 1,$$

$$(19) \qquad p - 2np + 2 = 0.$$

(e) Examinons d'abord le premier cas; en exprimant que les facteurs de chaque puissance de x dans (17) sont nuls, on trouve que l'on doit avoir

$$D^2 - 4BE = 0,$$

c'est-à-dire que θ est un carré. Prenons donc

$$\theta = (bx+d)^2;$$

l'équation (17) devient, en supprimant un facteur commun à tous les termes,

$$2b^2(2\rho + \sigma) + \alpha = 0.$$

D'autre part, l'équation (18) combinée avec (7) conduit à

$$(20) \qquad M(2p+1) + N(2p+2) = 0.$$

Les quantités que nous avons désignées par ρ et σ sont liées par la relation

$$M^2(\rho + \sigma) = (M+N)\sigma^2,$$

et, si l'on remplace σ par sa valeur Mnp, dans laquelle n et p sont exprimables en M et N, on trouve enfin pour α

$$\alpha = \frac{b^2 M^2}{4(M+N)}.$$

Quant à φ, il sera encore donné par l'équation (12), dont nous avons indiqué précédemment l'intégrale.

Nous avons donc le moyen de ramener à une quadrature l'intégration de

$$Myy'' + Ny'^2 = (bx+d)^{2p},$$

lorsque M, N, p sont liés par l'équation de condition (20).

(f) Passons au cas où la relation (19) est satisfaite. Elle peut se mettre sous la forme

$$M(p+1) + N(p+2) = 0;$$

et l'équation (17) sera identiquement nulle si l'on a

$$2\rho + \sigma = 0, \quad \rho D^2 + 2BE\sigma + \alpha = 0,$$

qui donnent pour α la valeur

$$\alpha = \frac{M^2(D^2 - 4BE)}{4(M+N)}.$$

On trouvera pour φ la même valeur que précédemment.

En résumé, lorsque, dans l'équation

$$Myy'' + Ny'^2 = f(x),$$

M, N, $f(x)$ satisfont à l'une des conditions suivantes :

(a)	$f(x) = (Bx + H)^p$,	$M(p+2) + N(p+4) = 0$,
(b)	$f(x) = e^{Bx+H}$,	$M + N = 0$,
(c)	$f(x) = \text{const.} = K$,	M, N quelconques,
(d)	$f(x) = \left[(Bx+D)^2 - \dfrac{6\alpha}{25NB^2}\right]^{\frac{1}{2}}$,	$3M + 5N = 0$,
(e)	$f(x) = (bx+d)^{2p}$,	$M(2p+1) + N(2p+2) = 0$,
(f)	$f(x) = (Bx^2 + Dx + E)^p$,	$M(p+1) + N(p+2) = 0$,

l'intégration peut être faite ou du moins ramenée à des quadratures et mise sous la forme

$$F\,dx = \frac{du}{\sqrt{\varphi + Cu^{-\frac{2N}{M}}}},$$

dans laquelle C est une constante arbitraire et φ une fonction de la forme

$$\varphi = \gamma u^{-\frac{2N}{M}} + \beta u^2 + \delta.$$

Les exposants de u seront souvent fractionnaires, mais on pourra les ramener à la forme entière en prenant $u = v^m$ et attribuant à m une valeur convenable.

Remarquons que, si dans le cas (f) on prend

$$M = p + 2, \quad N = -(p+1),$$

l'équation de condition sera satisfaite. Ce cas particulier donne la solution de la question n° 1289. Si, dans l'équation proposée, on remplace y par $v^{\frac{1}{2}}$, il vient

$$2Mvv'' + (M - N)v'^2 - 4vf(x) = 0.$$

Si l'on met à la place de y l'expression $v^{\frac{M}{M+N}}$, on trouve

$$\frac{M^2}{M+N} v^{\frac{M-N}{M+N}} v'' = f(x).$$

Enfin, dans le cas (f), prenons la fonction θ comme variable indépendante; nous aurons, en désignant par Δ et K deux quantités quelconques constantes,

$$(\Delta + 2\theta)\left[My\frac{d^2y}{d\theta^2} + N\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right] + My\frac{dy}{d\theta} = K\theta^p.$$

Ces diverses équations pourront être ramenées à des quadratures lorsque M, N, $f(x)$ satisferont à l'une des conditions (a), (b), (c), (d), (e), (f).