ÉDOUARD LUCAS

Sur l'équation indéterminée biquadratique $Ax^4 + By^4 = Cz^2$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 67-74

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__67_1>

SUR L'ÉQUATION INDÉTERMINÉE BIQUADRATIQUE

$$Ax^4 + By^4 = Cz^2;$$

PAR M. ÉDOUARD LUCAS,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Charlemagne.

L'analyse indéterminée des équations biquadratiques est peu avancée; Fermat a indiqué, le premier, le moyen de trouver, en général, une série indéfinie de solutions entières de l'équation

$$ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 = z^2,$$

lorsque l'un des coefficients extrêmes est un carré parfait, ou encore lorsque l'on connaît une première solution.

Dans le cas particulier de l'équation

$$x^4 + ax^2y^2 + by^4 = z^2,$$

on obtient, en général, une série indéfinie de solutions nouvelles, par les formules suivantes, déduites du procédé de Fermat, et données par Lebesgue :

$$X = x^4 - by^4, \quad Y = 2xyz, \quad Z = z^4 - (a^2 - 4b)x^4y^4.$$

L'application de ces formules devient illusoire dans certains cas, et ainsi, par exemple, pour l'équation

$$x^4 - x^2y^2 + y^4 = z^2,$$

à laquelle on est conduit lorsque l'on cherche à déterminer quatre carrés en progression arithmétique.

Le but de cette Note est de montrer que, lorsque l'on connaît une première solution de l'équation proposée, on obtient *deux* solutions nouvelles, et non une seule; nous observerons, de plus, que les formules que nous allons démontrer permettent de résoudre *complétement* l'équation proposée, pour certaines valeurs des coefficients A, B et C, et en particulier pour *toutes* les équations biquadratiques dont on connaît actuellement la résolution complète.

Considérons d'abord l'équation

$$(1) \qquad \mathrm{X}^4 + \lambda \mathrm{Y}^4 = (1 + \lambda)\mathrm{Z}^2,$$

dans laquelle nous désignerons, pour abréger, $1 + \lambda$ par ρ. On vérifie l'équation (1) en posant

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{X}^2 &= p^2 - \lambda q^2 - 2\lambda pq, \\ \mathrm{Y}^2 &= p^2 - \lambda q^2 + 2pq, \\ \mathrm{Z} &= p^2 + \lambda q^2. \end{aligned} \right.$$

La première équation du système (2) peut s'écrire

$$(p - \lambda q)^2 - \mathrm{X}^2 = \lambda\rho q^2;$$

on peut donc poser

$$\begin{aligned} p - \lambda q \pm \mathrm{X} &= 2\lambda\rho r^2, \\ p - \lambda q \mp \mathrm{X} &= 2s^2, \\ q &= 2rs, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \pm \mathrm{X} &= \lambda\rho r^2 - s^2, \\ p &= \lambda\rho r^2 + s^2 + 2\lambda rs. \end{aligned} \right.$$

La seconde équation du système (2) peut s'écrire

$$(p+q)^2 - \mathrm{Y}^2 = \rho q^2;$$

on peut donc poser

$$\begin{aligned} p + q \pm \mathrm{Y} &= 2\rho r'^2, \\ p + q \mp \mathrm{Y} &= 2s'^2, \\ q &= 2r's'; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \pm \mathrm{Y} &= \rho r'^2 - s'^2, \\ p &= \rho r'^2 + s'^2 - 2r's'. \end{aligned} \right.$$

En égalant les valeurs de p données par les systèmes (3) et (4), on obtient

$$\begin{aligned} \lambda\rho r^2 + s^2 + 2\lambda rs &= \rho r'^2 + s'^2 - 2r's', \\ rs &= r's'. \end{aligned}$$

Posons $nr' = mr$ et $ns = ms'$, nous obtenons, par l'élimination de r' et de s, l'équation quadratique en $m : n$

$$m^2(s'^2 - \rho r^2) + 2\rho rs'mn + n^2(\lambda\rho r^2 - s'^2) = 0;$$

pour que la valeur de $m : n$ soit rationnelle, on doit avoir

$$\rho^2 r^2 s'^2 + (s'^2 - \rho r^2)(s'^2 - \lambda\rho r^2) = \mathrm{H}^2,$$

ou bien

$$(5) \qquad s'^4 + \lambda\rho^2 r^4 = \mathrm{H}^2,$$

et, en même temps,

$$m = -\rho rs' \pm \mathrm{H}, \quad n = s'^2 - \rho r^2.$$

L'équation (5) donne, par décomposition,

$$\begin{aligned} \mathrm{H} \pm s'^2 &= 2\rho^2 z^4, \\ \mathrm{H} \mp s'^2 &= 8\lambda v^4, \\ r &= 2vz; \end{aligned}$$

par suite, en prenant les signes supérieurs,

$$\rho^2 z^4 - 4\lambda v^4 = s'^2;$$

cette dernière équation donne encore

$$\rho z^2 \pm s' = 2x^4,$$
$$\rho z^2 \mp s' = 2\lambda y^4,$$
$$v = xy,$$

et, par addition,

$$x^4 + \lambda y^4 = \rho z^2;$$

on retrouve ainsi l'équation (1).

Par conséquent, d'une première solution (x, y, z) de l'équation

$$\text{(A)} \qquad x^4 + \lambda y^4 = \rho z^2,$$

on obtiendra deux solutions nouvelles par les formules

$$\text{(B)} \quad \left\{ \begin{aligned} m &= 4\lambda x^4 y^4 + \rho^2 z^4 \pm 2\rho xyz(x^4 - \lambda y^4), \\ n &= (x^4 - \lambda y^4)^2 - 4\rho x^2 y^2 z^2, \\ \mathrm{X} &= 4\lambda\rho n^2 x^2 y^2 z^2 - m^2(x^4 - \lambda y^4)^2, \\ \mathrm{Y} &= 4\rho m^2 x^2 y^2 z^2 - n^2(x^4 - \lambda y^4)^2, \\ \mathrm{Z} &= [4\lambda\rho n^2 x^2 y^2 z^2 + m^2(x^4 - \lambda y^4)^2 \\ &\qquad + 4\lambda mnxyz(x^4 - \lambda y^4)]^2 \\ &\qquad + 4\lambda m^2 n^2 x^2 y^2 z^2 (x^4 - \lambda y^4)^2. \end{aligned} \right.$$

Si l'on remplace, dans les formules précédentes, λ par $\frac{\mu}{\lambda}$, on obtiendra deux solutions nouvelles de l'équation

$$\text{(6)} \qquad \lambda x^4 + \mu y^4 = (\lambda + \mu) z^2,$$

à l'aide d'une première, par les formules

$$\text{(7)} \quad \left\{ \begin{aligned} m &= 4\lambda\mu x^4 y^4 + (\lambda + \mu)^2 z^4 \pm 2(\lambda + \mu) xyz(\lambda x^4 - \mu y^4), \\ n &= (\lambda x^4 - \mu y^4)^2 - 4\lambda(\lambda + \mu) x^2 y^2 z^2, \\ \mathrm{X} &= 4\mu(\lambda + \mu) n^2 x^2 y^2 z^2 - m^2(\lambda x^4 - \mu y^4)^2, \\ \mathrm{Y} &= 4\lambda(\lambda + \mu) m^2 x^2 y^2 z^2 - n^2(\lambda x^4 - \mu y^4)^2, \\ \mathrm{Z} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

L'équation (6) est vérifiée pour $x = y = z = \pm 1$; on a donc les deux solutions nouvelles

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} m &= 4\lambda\mu + (\lambda + \mu)^2 \pm 2(\lambda^2 - \mu^2), \\ n &= (\lambda - \mu)^2 - 4\lambda(\lambda + \mu), \\ \mathrm{X} &= 4\mu(\lambda + \mu)n^2 - m^2(\lambda - \mu)^2, \\ \mathrm{Y} &= 4\lambda(\lambda + \mu)m^2 - n^2(\lambda - \mu)^2, \\ \mathrm{Z} &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}\right.$$

ainsi l'équation

$$3x^4 - 2y^4 = z^2$$

est vérifiée par les solutions

$$x_1 = 33, \qquad y_1 = 13, \qquad z_1 = 1871,$$
$$x_2 = 28577, \quad y_2 = 8843, \quad z_2 = 1410140689;$$

de même, de la solution

$$x_1 = 3, \quad y_1 = 1, \quad z_1 = 11$$

de l'équation

$$3x^4 - y^4 = 2z^2$$

on déduit les deux solutions

$$x_2 = 19, \quad y_2 = 25, \quad z_2 = 13,$$
$$x_3 = 449, \quad y_3 = 167, \quad z_3 = 246121;$$

de même, les premières solutions de l'équation

$$x^4 + 3y^4 = z^2$$

sont

$$\begin{array}{llllll} x = 1, & 1, & 11, & 47, & 7199, & \ldots. \\ y = 1, & 2, & 3, & 28, & 8052, & \ldots, \\ z = 2, & 7, & 122, & 2593, & 12259565, & \ldots \end{array}$$

et les premières solutions de l'équation

$$x^4 + 2y^4 = 3z^2$$

sont

$$x_1 = 23, \qquad y_1 = 11, \qquad z_1 = 321,$$
$$x_2 = 2375, \qquad y_2 = 6227, \qquad z_2 = 31827137.$$

Revenons maintenant à l'équation proposée

$$AX^4 + BY^4 = CZ^2;$$

en admettant une première solution (x_0, y_0, z_0), on peut l'écrire

$$Ax_0^4\left(\frac{X}{x_0}\right)^4 + By_0^4\left(\frac{Y}{y_0}\right)^4 = Cz_0^2\left(\frac{Z}{z_0}\right)^2,$$

et, si l'on pose

$$Ax_0^4 = \lambda, \quad By_0^4 = \mu, \quad Cz_0^2 = \lambda + \mu,$$

on la ramène à l'équation (6), en prenant pour variables les quotients $\frac{X}{x_0}, \frac{Y}{y_0}, \frac{Z}{z_0}$. Par une analyse plus approfondie, il est facile de montrer que les formules (7) permettent de résoudre *complétement* les équations biquadratiques suivantes :

$$\begin{array}{ll}
x^4 - 2y^4 = \pm z^2, & 4x^4 - 3y^4 = z^2, \\
x^4 + 8y^4 = z^2, & x^4 - 12y^4 = z^2, \\
4x^4 - y^4 = 3z^2, & 3x^4 - 2y^4 = z^2, \\
9x^4 - y^4 = 8z^2, & x^4 - 6y^4 = z^2, \\
27x^4 - 2y^4 = z^2, & x^4 + 216y^4 = z^2, \\
x^4 - 36y^4 = z^2, & x^4 + 24y^4 = z^2, \\
x^4 - y^4 = 24z^2, & x^4 + 2y^4 = 3z^2, \\
3x^4 - y^4 = 2z^2, & x^4 - 18y^4 = z^2, \\
x^4 + 3y^4 = z^2, & x^4 - 72y^4 = z^2. \\
x^4 - 54y^4 = z^2, &
\end{array}$$

Ces équations représentent toutes celles dont les coefficients ne contiennent que les facteurs 2 et 3, et dont la solution est possible. On peut, de même, résoudre complétement un très-grand nombre d'autres équations de la forme proposée. Lagrange a donné, le premier, la résolution des équations

$$x^4 - 2y^4 = \pm z^2 \quad \text{et} \quad x^4 + 8y^4 = z^2;$$

la résolution générale des équations qui précèdent, avec la discussion approfondie de chacun des cas particuliers, a été publiée, en 1873, dans mes *Recherches sur l'Analyse indéterminée,* à Moulins-sur-Allier.

Plus généralement, on démontre, de même, que d'une première solution (x, y, z) de l'équation

$$(9) \qquad x^4 - 2(a + 2f^2)x^2y^2 + (a^2 + b^2)y^4 = z^2,$$

on déduit deux autres solutions par les formules

$$(10) \qquad \begin{cases} \Delta = 4f^4 + 4af^2 - b^2, \\ m = bxyz \pm f\left[x^4 - (a^2 + b^2)y^4\right], \\ n = z^2 + 4f^2x^2y^2, \\ \mathrm{X} = 16amnxyz(4m^2x^2y^2 - n^2z^2) \\ \qquad + b\left[16m^2x^2y^2z^2 - (4m^2x^2y^2 - n^2z^2)^2\right], \\ \mathrm{Y} = 2(4m^2x^2y^2 - n^2z^2)\dfrac{\Delta n^2x^2y^2 + m^2z^2}{f}, \\ \mathrm{Z} = \Delta(4m^2x^2y^2 - n^2z^2)^4 - 4\left(\dfrac{\Delta n^2x^2y^2 + m^2z^2}{f}\right)^4. \end{cases}$$

Dans un grand nombre de cas, ces formules résolvent complétement l'équation (9); c'est le cas de l'équation

$$x^4 - 4x^2y^2 + y^4 = z^2,$$

à laquelle on est conduit par les énoncés suivants :

Problème I. — *Trouver trois carrés inégaux tels que la somme de deux quelconques d'entre eux, diminuée du troisième, soit un carré parfait.*

Problème II. — *Trouver un triangle rectangle, en* *nombres entiers, tel que le carré de l'hypoténuse augmenté du double de l'aire du triangle soit un carré parfait.*

PROBLÈME III. — *Trouver, en nombres entiers, deux triangles ayant deux côtés égaux chacun à chacun, et dans lesquels l'angle compris est égal à* 90 *degrés pour le premier triangle et à* 60 *ou* 120 *degrés pour le second.*

La dernière équation, dont les plus petites solutions sont

$$\begin{array}{lll} x_0 = 2, & y_0 = 1, & z_0 = 1, \\ x_1 = 15, & y_1 = 4, & z_1 = 191, \\ x_2 = 161, & y_2 = 442, & z_2 = 364807, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

avait été traitée incomplétement par Legendre (*Théorie des nombres*, t. II, p. 126 et 127).