Laguerre

Sur la règle des signes de Descartes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 5-13

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SUR LA RÈGLE DES SIGNES DE DESCARTES;

Par M. LAGUERRE.

1. La règle des signes de Descartes consiste dans les deux propositions suivantes :

I. $F(x)$ *désignant un polynôme ordonné suivant les puissances décroissantes de* x, *le nombre des racines positives de l'équation* $F(x) = 0$ *est au plus égal au nombre des variations du polynôme* $F(x)$.

II. *Si le nombre des racines positives est inférieur au nombre des variations du polynôme, la différence est un nombre pair.*

2. Pour établir la première proposition, je démontrerai que, si elle est vraie quand le polynôme qui forme le premier membre de l'équation présente $(m - 1)$ variations, elle est également vraie quand ce polynôme présente m variations. La proposition sera, par suite, établie dans toute sa généralité, puisqu'elle a lieu évidemment dans le cas où tous les termes du polynôme sont de même signe.

Soit donc $F(x) = Ax^p + \ldots + Mx^r + Nx^s + \ldots + R$ un polynôme présentant m variations. L'équation

$$F(x)x^{-\alpha} = 0, \tag{1}$$

où α désigne un nombre arbitraire, a les mêmes racines positives que l'équation

$$(2)\qquad F(x) = 0.$$

La fonction qui constitue le premier membre de cette équation demeure d'ailleurs finie et continue quand x croît indéfiniment à partir d'un nombre positif ε aussi petit que l'on veut. On peut donc appliquer à cette équation le théorème de Rolle entre les limites o et $+\infty$, et l'on voit que le nombre des racines positives de l'équation (2) est au plus supérieur d'une unité au nombre des racines positives de l'équation $x^{-(\alpha+1)}[xF'(x) - \alpha F(x)]$, ou encore de l'équation

$$(3)\qquad xF'(x) - \alpha F(x) = 0.$$

Les coefficients de cette équation sont respectivement

$$A(p-\alpha),\ \ldots,\ M(r-\alpha),\ N(s-\alpha),\ \ldots,\ -R\alpha.$$

Le polynôme $F(x)$ présentant m variations, supposons que M et N soient de signes contraires et choisissons le nombre arbitraire α de telle sorte qu'il se trouve compris entre les nombres entiers r et s (*); on voit que, dans la suite précédente, les coefficients numériques des quantités A, ..., M sont tous positifs, et ceux des quantités N, ..., R tous négatifs.

Le premier membre de l'équation (3) présente donc autant de variations que la suite

$$A,\ \ldots,\ M,\ -N,\ \ldots,\ -R,$$

c'est-à-dire $(m-1)$ variations; par suite, cette équation a au plus $(m-1)$ racines positives, et l'équation (2) a au

(*) On pourrait prendre plus simplement α égal à r ou à s; mais, dans quelques applications des considérations précédentes, il est utile de pouvoir, entre certaines limites, disposer de la valeur de α.

plus m racines positives. La proposition I est donc complétement établie.

Pour démontrer la proposition II, il suffit, comme on sait, de remarquer que le nombre des racines positives de l'équation (2) et le nombre des variations du polynôme $F(x)$ sont toujours de même parité.

3. La démonstration précédente ne suppose pas essentiellement que, dans l'équation (2), $F(x)$ soit un polynôme entier.

En particulier, rien dans l adémonstration ne suppose les exposants $p, \ldots, r, s, \ldots$ entiers; ainsi, l'équation

$$x^3 - x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{7}} - 1 = 0,$$

présentant trois variations, a au plus trois racines réelles.

Supposons, par exemple, que $F(x)$ soit une série ordonnée suivant les puissances croissantes de x, convergente pour toutes les valeurs positives de x plus petites qu'un nombre donné a, et cessant d'être convergente pour $x = a$. Supposons, en outre, que le nombre des variations de la série $F(x)$ soit fini; on établira, comme ci-dessus, que *le nombre des valeurs de x pour lesquelles la série* $F(x)$ *est convergente et a pour valeur zéro est au plus égal au nombre des variations de la série* $F(x)$.

De plus, *si le nombre des valeurs de x qui jouissent de cette propriété est inférieur au nombre des variations de la série, la différence est un nombre pair.*

En effet, le nombre des variations des termes de la série étant fini, $F(x)$ est égal à un polynôme $\Phi(x)$ suivi d'un nombre indéfini de termes ayant tous le signe du dernier terme de $\Phi(x)$. Pour $x = 0$, la série a le signe du premier terme de $\Phi(x)$. Quand x tend vers la valeur a, $\Phi(x)$ tend vers une valeur finie; les termes complémentaires, qui sont en nombre infini, ont tous le signe du dernier terme de $\Phi(x)$, et leur valeur absolue va en croissant indéfiniment, puisque la série $F(x)$ est divergente pour $x = a$. Donc, quand x s'approche indéfiniment de a, la série $\Phi(x)$ croît indéfiniment en valeur absolue en gardant le signe du dernier terme de $\Phi(x)$; d'où résulte immédiatement la proposition énoncée.

4. Pour appliquer cette proposition à la recherche du nombre des racines positives de l'équation

$$f(x) = 0, \tag{4}$$

où $f(x)$ désigne un polynôme entier, je choisirai un polynôme $\varphi(x)$, assujetti à la seule condition que le développement de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ suivant les puissances croissantes de x ne renferme qu'un nombre limité de variations.

Cela posé, A désignant le plus petit des modules des racines de l'équation $\varphi(x) = 0$, ce développement est convergent pour toutes les valeurs positives de x plus petites que A et est divergent pour $x = A$; il s'annule d'ailleurs pour toutes les racines positives de l'équation (4) qui sont inférieures à A.

On peut donc énoncer cette proposition :

Le polynôme $\varphi(x)$ satisfaisant à la condition ci-dessus énoncée, le nombre des racines positives de l'équation $f(x) = 0$, dont la valeur est inférieure à A *est au plus égal au nombre des variations du développement de $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ suivant les puissances croissantes de x, et, s'il lui est inférieur, la différence est un nombre pair.*

5. En considérant seulement les cas les plus simples, soit d'abord $\varphi(x) = p - x$, p désignant un nombre quelconque positif.

Soit n le degré de $f(x)$; en désignant par P un polynôme du degré $(n-1)$, on a identiquement

$$\frac{f(x)}{p-x} = \mathrm{P} + \frac{f(p)}{p-x} = \mathrm{P} + f(p)\left(\frac{1}{p} + \frac{x}{p^2} + \frac{x^2}{p^3} + \cdots\right).$$

On voit que tous les termes de ce développement ont, à partir du coefficient de x^n, le même signe. D'ailleurs, ce développement est convergent pour toutes les valeurs positives de x inférieures à p; donc le nombre des racines positives de l'équation $f(x) = 0$, dont la valeur est inférieure à p, est au plus égal au nombre des variations que présentent les termes du développement de $\frac{f(p)}{p-x}$ dont le degré ne dépasse pas n.

Comme il s'agit seulement d'obtenir les signes des termes de ce développement, et que p est positif, on peut remplacer l'expression $\frac{f(x)}{p-x}$ par $\frac{f(px)}{p(1-x)}$, ou encore par la suivante :

$$\frac{f(px)}{1-x} = f(px)(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots);$$

d'où cette proposition :

Étant donnée l'équation

$$\mathrm{A}_0 x^n + \mathrm{A}_1 x^{n-1} + \mathrm{A}_2 x^{n-2} + \ldots + \mathrm{A}_{n-1} x + \mathrm{A}_n = 0,$$

le nombre des racines positives de cette équation, dont la valeur est inférieure au nombre positif p, est au plus égal au nombre des variations de la suite

$$\begin{array}{r}
\mathrm{A}_0 p^n + \mathrm{A}_1 p^{n-1} + \mathrm{A}_2 p^{n-2} + \ldots + \mathrm{A}_{n-2} p^2 + \mathrm{A}_{n-1} p + \mathrm{A}_n, \\
\mathrm{A}_1 p^{n-1} + \mathrm{A}_2 p^{n-2} + \ldots + \mathrm{A}_{n-2} p^2 + \mathrm{A}_{n-1} p + \mathrm{A}_n, \\
\mathrm{A}_2 p^{n-2} + \ldots + \mathrm{A}_{n-2} p^2 + \mathrm{A}_{n-1} p + \mathrm{A}_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\mathrm{A}_{n-2} p^2 + \mathrm{A}_{n-1} p + \mathrm{A}_n, \\
\mathrm{A}_{n-1} p + \mathrm{A}_n, \\
\mathrm{A}_n;
\end{array}$$

et, s'il lui est inférieur, la différence est un nombre pair.

6. En désignant toujours par p un nombre quelconque positif, faisons en second lieu

$$\varphi(x) = (p - x)^2.$$

On a identiquement, P étant un polynôme entier du degré $(n - 2)$,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{(p-x)^2} &= \mathrm{P} + \frac{f(p)}{(p-x)^2} - \frac{f'(p)}{p-x} \\
&= \mathrm{P} + \frac{f(p)}{p^2}\left[1 - p\frac{f'(p)}{f(p)}\right] \\
&\quad + \frac{f(p)}{p^3}\left[2 - p\frac{f'(p)}{f(p)}\right]x + \ldots \\
&\quad + \frac{f(p)}{p^{n+1}}\left[n - p\frac{f'(p)}{f(p)}\right]x^{n-1} \\
&\quad + \frac{f(p)}{p^{n+2}}\left[n + 1 - p\frac{f'(p)}{f(p)}\right]x^{n} \\
&\quad + \frac{f(p)}{p^{n+3}}\left[n + 2 - p\frac{f'(p)}{f(p)}\right]x^{n+1} + \ldots .
\end{aligned}$$

Le nombre des variations du second membre se compose d'abord des variations du polynôme entier Q, *formé des termes du développement de* $\frac{f(x)}{(p-x)^2}$ *dont l'exposant est inférieur à* n, *et ensuite des variations des termes de la suite*

$$n - p\frac{f'(p)}{f(p)}, \quad n + 1 - p\frac{f'(p)}{f(p)}, \quad n + 2 - p\frac{f'(p)}{f(p)}, \ \ldots .$$

Comme ces termes vont toujours en croissant, la suite ne peut présenter qu'une variation, et elle la présentera effectivement si le nombre $n - p\frac{f'(p)}{f(p)}$ est négatif.

Au lieu du développement de $\frac{f(x)}{(p-x)^2}$, on peut évidemment considérer le suivant :

$$\frac{f(px)}{(1-x)^2} = f(px)\,(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots)$$

et énoncer cette proposition :

Étant donnée l'équation

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-2} x^2 + A_{n-1} x + A_n,$$

si λ *désigne le nombre des racines de l'équation*

$$f(x) = 0$$

positives et inférieures au nombre positif p, *et* μ *le nombre des variations des termes de la suite*

$$\begin{array}{r}
A_1 p^{n-1} + 2A_2 p^{n-2} + \ldots + (n-2) A_{n-2} p^2 + (n-1) A_{n-1} p + n A_n, \\
A_2 p^{n-2} + \ldots + (n-3) A_{n-2} p^2 + (n-2) A_{n-1} p + (n-1) A_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
A_{n-2} p^2 + 2A_{n-1} p + 3A_n, \\
A_{n-1} p + 2A_n, \\
A_n,
\end{array}$$

le nombre λ *est au plus égal au nombre* $(\mu + 1)$. *et leur différence est un nombre impair si la quantité* $n - p\frac{f'(p)}{f(p)}$ *est positive ou nulle; la différence est zéro ou un nombre pair si cette quantité est négative.*

7. Soient p et q deux nombres positifs quelconques assujettis à la seule condition que q soit plus grand que p; faisons $\varphi(x) = (p-x)(q-x)$. Le développement en série de $\frac{f(x)}{(p-x)(q-x)}$ est convergent pour toutes les

valeurs positives de x inférieures à p, et l'on a identiquement, P désignant un polynôme entier du degré $(n-2)$,

$$\frac{f(x)}{(p-x)(q-x)} = \mathrm{P} + \frac{f(p)}{q-p}\frac{1}{p-x} - \frac{f(q)}{q-p}\frac{1}{q-x}$$

$$\begin{aligned}
= \mathrm{P} + \frac{1}{q-p}\Bigg\{ & \frac{f(p)}{q}\left[\frac{q}{p} - \frac{f(q)}{f(p)}\right] \\
& + \frac{f(p)}{q^2}\left[\frac{q^2}{p^2} - \frac{f(q)}{f(p)}\right] x + \ldots \\
& + \frac{f(p)}{q^n}\left[\frac{q^n}{p^n} - \frac{f(q)}{f(p)}\right] x^{n-1} \\
& + \frac{f(p)}{q^{n+1}}\left[\frac{q^{n+1}}{p^{n+1}} - \frac{f(q)}{f(p)}\right] x^n \\
& + \frac{f(p)}{q^{n+2}}\left[\frac{q^{n+2}}{p^{n+2}} - \frac{f(q)}{f(p)}\right] x^{n+1} + \ldots \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Le nombre des variations du second membre se compose d'abord des variations du polynôme entier Q, formé des termes du développement de $\dfrac{f(x)}{(p-x)(q-x)}$ dont l'exposant est inférieur à n, et ensuite des variations des termes de la suite

$$\frac{q^n}{p^n} - \frac{f(q)}{f(p)}, \quad \frac{q^{n+1}}{p^{n+1}} - \frac{f(q)}{f(p)}, \quad \frac{q^{n+2}}{p^{n+2}} - \frac{f(q)}{f(p)}, \quad \ldots.$$

Or, $\dfrac{q}{p}$ étant plus grand que 1, les termes de cette suite vont toujours en croissant et ne peuvent présenter qu'une variation; elle se présentera si $\dfrac{q^n}{p^n} - \dfrac{f(q)}{f(p)}$ est négatif.

En se reportant à ce que j'ai dit plus haut, on peut donc énoncer la proposition suivante :

En désignant par $f(x)$ un polynôme entier du degré n, et par p et q deux nombres positifs arbitraires, mais dont le second soit supérieur au premier, soient λ le nombre des racines positives de l'équation $f(x) = 0$

qui sont inférieures à p, *et* μ *le nombre des variations du polynôme formé des termes du développement de*

$$\frac{f(x)}{(p-x)(q-x)},$$

dont l'exposant est inférieur à n; *le nombre* μ *est au plus égal au nombre* $(\lambda+1)$, *et leur différence est un nombre impair si la quantité*

$$\frac{q^n}{p^n}-\frac{f(q)}{f(p)}$$

est positive ou nulle; elle est zéro ou un nombre pair si cette quantité est négative.