NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LAGUERRE

Sur quelques propriétés des foyers des courbes algébriques et des focales des cônes algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 57-67

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__57_1>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FOYERS DES COURBES ALGÉBRIQUES ET DES FOCALES DES CONES ALGÉBRIQUES;

PAR M. LAGUERRE.

I.

1. Je m'appuierai sur la proposition suivante, que j'ai donnée dans ma Note *sur les polaires d'une droite relativement aux courbes et aux surfaces algébriques* (*).

Étant données deux courbes quelconques K^m *et* K^n, *de classes respectivement égales à* m *et à* n, *la polaire d'un point quelconque* M, *relativement aux* mn *tangentes communes à ces courbes, est la polaire du même point relativement aux* mn *droites, qui joignent les points de contact des tangentes menées de* M *à* K^m *aux points de contact des tangentes menées du même point à* K^n.

Supposons, pour fixer les idées, que K^m soit une courbe réelle (ou du moins ayant une équation réelle), et soient $F_1, F_2, \ldots, F_m$ ses m foyers réels; supposons, en outre, que K^n se réduise aux deux ombilics I et J du plan (**).

Les tangentes communes à K^m et à K^n se composent des systèmes de droites isotropes, se croisant aux foyers

(*) *Bulletin de la Société Mathématique*, t. III, p. 174.

(**) J'appelle ainsi, pour abréger, les deux points situés à l'infini et communs à tous les cercles du plan.

$F_1, F_2, \ldots, F_m$. Étant donné un point quelconque M du plan, sa polaire relativement aux deux droites isotropes issues du foyer F_i est la droite menée par ce point perpendiculairement à MF_i; donc la polaire de M relativement aux tangentes communes à K^m et à K^n est la polaire de ce point relativement aux m droites menées respectivement par chacun des foyers perpendiculairement à la droite qui joint ce foyer au point M.

Considérons d'autre part les diverses droites isotropes qui passent par les points de contact des tangentes menées du point M à K^n; T désignant l'un quelconque de ces points de contact, la polaire du point M, relativement aux deux droites isotropes se croisant au point T, est la normale menée à la courbe en ce point.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Étant donnée une courbe de m^n classe, la polaire d'un point quelconque M *du plan, par rapport aux droites menées respectivement par chacun des m foyers réels de la courbe perpendiculairement à la droite qui joint ce foyer au point* M, *se confond avec la polaire de ce même point relativement aux droites menées normalement à la courbe aux points de contact des diverses tangentes issues du point* M.

Cette proposition peut encore s'énoncer sous la forme suivante :

Si par un point M, *pris dans le plan d'une courbe de classe m, on mène les nm droites tangentes à la courbe, le centre harmonique des n points de contact relativement au point* M *est le même que le centre harmonique des m foyers réels* (*).

(*) Voir à ce sujet ma Note *Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes* (*Bulletin de la Société Philomathique*, février 1875).

Mais cet énoncé, plus concis, est souvent d'un usage moins facile dans les applications, et l'autre, comme je le ferai voir, s'étend sans difficulté aux cônes algébriques.

2. Un des cas particuliers les plus intéressants est celui où tous les foyers de la courbe sont à l'infini. On a alors ce théorème :

Si par un point M, *pris dans le plan d'une courbe ayant tous ses foyers à l'infini, on mène les tangentes à la courbe, puis les normales aux points de contact, la polaire du point* M *relativement à ces normales est située à l'infini.*

Ainsi, en particulier, l'hypocycloïde à trois points de rebroussement ayant tous ses foyers à l'infini, on a la proposition suivante :

Si par un point M, *pris dans le plan d'une hypocycloïde à trois points de rebroussement, on mène les tangentes à la courbe, puis les normales aux points de contact, ces normales forment un triangle dont le centre de gravité est le point* M.

3. Comme application, je déduirai de là un beau théorème dû à M. Liouville.

Soient une droite D et une courbe A de degré m, *assujettie à la seule condition de ne pas passer par les ombilics du plan.*

Considérons une droite de longueur constante R et se déplaçant de telle sorte qu'une de ses extrémités décrive la droite D, tandis que l'autre décrit la courbe A. L'enveloppe de cette droite est une courbe K ayant tous ses foyers à l'infini ; en effet, la droite ne peut passer par un ombilic que quand elle se confond avec la droite de l'infini ; dans toute autre position, la longueur interceptée entre le point où elle rencontre D et l'un quelconque des points où elle rencontre A est évidemment nulle, puisque cette courbe ne passe pas par les ombilics.

Soit maintenant un point quelconque M pris sur la droite D; cherchons les tangentes que l'on peut mener de ce point à la courbe K. Je remarque d'abord que D est elle-même une tangente multiple à cette courbe; je désignerai par d, d', ... ses divers points de contact.

En second lieu, si, du point M comme centre avec R comme rayon, nous décrivons un cercle rencontrant la courbe A aux points a, a', a'', ..., les diverses droites Ma, Ma', Ma'', ... seront aussi tangentes à K.

Considérons en particulier une de ces tangentes, Ma par exemple; si au point M nous menons une perpendiculaire à D et au point a une normale à la courbe A, nous savons, en désignant par α le point de rencontre de ces deux droites, que la normale, menée à l'enveloppe de la droite de longueur constante aM au point où elle touche son enveloppe, passe par le point α.

4. Du théorème général que j'ai donné plus haut (n° 1), il résulte que, l'enveloppe K ayant tous ses foyers à l'infini, si l'on construit la polaire du point M relativement aux droites menées en d, d', ... perpendiculairement à D et aux droites menées normalement à K aux points où les droites Ma, Ma', ... touchent cette courbe, cette polaire est située à l'infini.

En particulier, menons par le point M une sécante perpendiculaire à D; elle rencontrera les droites issues des points d, d', ... en des points situés à l'infini et dont il n'y a pas à tenir compte, puis les normales élevées aux points de contact de Ma, Ma', Ma'', ... avec leur enveloppe au point α et en d'autres points analogues α',

α'', ... ; on aura donc la relation

$$\frac{1}{M\alpha} + \frac{1}{M\alpha'} + \frac{1}{M\alpha''} + \ldots = 0.$$

Si l'on remarque maintenant que, la droite D ayant une direction arbitraire, il en est de même de la direction de la sécante qui lui est perpendiculaire, on pourra énoncer ce beau théorème, dû à M. Liouville :

Si, aux différents points où un cercle rencontre une courbe plane, on mène des normales à cette courbe, la polaire du centre du cercle relativement à ces normales est située à l'infini.

5. Je considérerai encore, comme application, un système de coniques homofocales ayant pour foyers les deux points F et F'.

Soit M un point quelconque du plan; considérons les droites passant par les points F et F' et respectivement perpendiculaires aux directions MF et MF'. Si l'on désigne par Δ la polaire du point M relativement à ces deux droites, on voit que :

Si du point M *on mène des tangentes à l'une quelconque des coniques qui ont pour foyers les points* F *et* F', *puis les normales aux points de contact, la polaire des points* M *relativement à ces deux normales est la droite fixe* Δ.

En particulier, la polaire du point M relativement aux deux normales passe par le point de rencontre de ces normales.

D'où le théorème suivant :

Si, d'un point M, *on mène des tangentes à l'une quelconque des coniques qui ont pour foyers les points* F *et* F', *puis les normales aux points de contact, le lieu des points de rencontre de ces normales est une droite.*

Il est clair que cette droite passe par les centres de courbure des deux coniques homofocales qui se croisent au point M.

6. Les deux points F et F′ étant donnés, on voit qu'à chaque point M du plan correspond une droite Δ qu'il est facile de construire.

Réciproquement, à chaque droite Δ correspondent, comme on le démontre aisément, trois points M. Si une droite Δ tourne autour d'un point fixe N, le lieu des points M correspondants est une courbe du troisième ordre passant par les ombilics, par conséquent une anallagmatique et de l'espèce particulière que j'ai étudiée sous la dénomination de *cassiniennes* (*).

Cette courbe H peut évidemment être aussi définie de la façon suivante :

Étant donné un point fixe N du plan, considérons une quelconque des coniques qui ont pour foyers deux points donnés F et F′, puis abaissons du point N les quatre normales à la courbe. Les tangentes en ces points forment un quadrilatère complet dont les six sommets décrivent la courbe H lorsque la conique varie.

7. Je rappellerai brièvement la définition et les propriétés principales des cassiniennes.

Une cassinienne est généralement une courbe anallagmatique du quatrième ordre dont les divers points peuvent se distribuer en couples jouissant des propriétés suivantes :

1° Le lieu des conjugués harmoniques d'un point quelconque du plan, relativement à chacun des couples de points conjugués d'une cassinienne, est un cercle.

(*) *Sur les cassiniennes planes et sphériques* (*Bulletin de la Société Philomathique*, mars 1868).

En particulier, le lieu des points milieux des cordes qui joignent les points conjugués est un cercle.

2° Il existe dans le plan deux points fixes jouissant de la propriété que ces deux points fixes et deux points conjugués quelconques se trouvent sur un même cercle qu'ils partagent harmoniquement.

Dans le cas où le cercle, lieu des points milieux des cordes qui joignent les points conjugués, se réduit à une droite, le degré de la courbe s'abaisse au troisième, et l'on a une cassinienne cubique.

Si l'on joint un point quelconque d'une telle courbe à deux couples de points conjugués, on obtient deux couples de droites ayant mêmes bissectrices.

La courbe H, définie ci-dessus, est une cassinienne cubique, et l'on a la proposition suivante :

Si d'un point fixe N, *pris dans le plan, on abaisse des normales sur l'une quelconque des coniques qui ont pour foyers deux points fixes* F *et* F′, *les tangentes menées en ces points forment un quadrilatère complet. Les trois couples de sommets opposés de ce quadrilatère complet sont trois couples de points conjugués d'une même cassinienne cubique, que ces sommets décrivent quand on fait varier la conique* (*).

(*) Les tangentes, menées aux pieds des normales, roulent en même temps sur une parabole fixe.

Considérons en effet une conique C et la parabole P qui est l'enveloppe des polaires d'un point donné M par rapport aux diverses coniques qui ont les mêmes foyers que C. Les tangentes communes à C et à P touchent C en quatre points et les normales en ces points passent par le point M.

Cette propriété s'établit aisément en s'appuyant sur une importante proposition due à M. Chasles :

Les pôles d'une droite fixe, par rapport à un système de coniques homofocales, sont situés sur une même ligne droite normale à une des coniques du système.

J'ajouterai que le foyer de la parabole P est le point conjugué harmonique du point M relativement aux foyers de la conique C.

De nombreuses propriétés des normales à un système de coniques homofocales découlent immédiatement de la proposition précédente, mais je n'insisterai pas ici sur ce point, qui demande quelques développements et sur lequel je reviendrai dans un autre article; je me contente de le mentionner en passant.

II.

8. On peut facilement étendre aux cônes algébriques les propositions qui précèdent.

Le théorème fondamental que j'ai rappelé plus haut (n° 1) peut, en effet, s'énoncer de la façon suivante :

Étant donnés deux cônes algébriques C *et* C′ *ayant même sommet* S *et une droite quelconque* D *passant par ce sommet, considérons les divers plans que par la droite* D *on peut mener tangentiellement au cône* C; *soit* (I) *l'ensemble des arêtes de contact. Appelons de même* (I′) *l'ensemble des arêtes de contact des plans menés par* D *tangentiellement au cône* C′; *puis imaginons que par chacune des arêtes* (I) *et chacune des arêtes* (I′) *on fasse passer un plan; on aura ainsi un ensemble de plans que je désigne par* (P).

Cela posé, le plan polaire de la droite D *relativement au système de plans* (P) *se confond avec le plan polaire de cette même droite relativement aux plans tangents aux deux cônes.*

Supposons, pour fixer les idées, que C soit un cône réel (ou du moins ait une équation réelle) et que F_1, F_2, F_3, ... désignent ses droites focales réelles, que de plus C′ soit un cône isotrope.

Les plans tangents communs aux deux cônes sont les plans isotropes passant par les droites F_1, F_2, F_3, ... ; le plan polaire de D relativement aux deux plans isotropes qui se coupent suivant l'une quelconque de ces droites,

F_1 par exemple, est le plan passant par F_1 et mené perpendiculairement au plan de F_1 et de D.

D'autre part, si T_1, T_2, T_3, ... désignent les arêtes de contact des plans menés par D tangentiellement au cône C, les divers plans dont j'ai désigné ci-dessus l'ensemble par (P) sont les plans isotropes passant par les droites T_1, T_2, T_3, ... ; le plan polaire de D relativement aux deux plans isotropes qui se coupent suivant l'une de ces droites, T_1 par exemple, est le plan passant par T_1 mené perpendiculairement au plan de T_1 et de D.

Par suite, on peut énoncer la proposition suivante :

Étant donné un cône algébrique et une droite quelconque D *passant par le sommet de ce cône, par chacune des focales du cône faisons passer un plan perpendiculaire au plan qui contient cette focale et la droite* D; *soit* (P) *l'ensemble des plans ainsi obtenus.*

Cela posé, le plan polaire de D *relativement aux plans* (P) *se confond avec le plan polaire de cette même droite relativement aux plans menés normalement au cône par les arêtes de contact des divers plans que l'on peut par* D *mener tangentiellement à ce cône.*

9. Comme application, considérons l'un quelconque des cônes du second ordre qui ont pour focales réelles deux droites données F et F'. Soient D une droite quelconque passant par le sommet du cône et Δ le plan polaire de D relativement aux plans passant par F et F', et respectivement perpendiculaires aux plans déterminés par les droites FD et les droites F'D.

Si par D on mène deux plans tangents au cône, puis des plans normaux par les arêtes de contact, le plan polaire de D relativement à ces plans normaux est le plan Δ.

En particulier, la droite d'intersection des plans normaux est dans le plan Δ. Donc :

Étant donné un système de cônes homofocaux du second ordre et une droite fixe passant par le sommet de ce cône, si par cette droite on mène des plans tangents à l'un des cônes du système, puis des plans normaux par les arêtes de contact, la droite suivant laquelle se coupent les deux plans normaux décrit un plan lorsqu'on fait varier le cône.

10. Si par une arête d'un cône on imagine le plan normal à ce cône, puis le plan mené normalement par l'arête infiniment voisine, l'intersection de ces deux plans est l'axe d'un cône de révolution osculateur du cône donné le long de l'arête considérée. Nous l'appellerons l'*axe de courbure* du cône suivant cette arête.

Cela posé, il est clair, d'après ce qui précède, que le plan Δ déterminé comme je l'ai dit, et qui correspond à la droite D, contient les axes de courbure des deux cônes homofocaux du système donné qui se coupent suivant la droite D, et de là découle un moyen simple de construire l'axe de courbure d'un cône du second degré suivant une arête donnée, lorsque l'on connaît les focales de ce cône.

Je ferai même observer que la connaissance du plan Δ fait connaître non-seulement l'axe de courbure, mais encore l'accélération de courbure, et que des considérations de tout point semblables s'appliquent aux cônes de tous les degrés; je ne crois pas utile de m'étendre davantage à ce sujet.

11. Le théorème de M. Liouville, dont j'ai donné plus haut la démonstration (n° 3), s'étend aussi à un cône algébrique quelconque, en considérant l'intersection de ce cône avec un cône de révolution.

On obtiendrait facilement cette généralisation, au moyen des théorèmes précédents, en considérant la surface enveloppée par le plan déterminé par deux droites faisant un angle constant et dont l'un des côtés décrit un cône pendant que l'autre se meut dans un plan passant par le sommet de ce cône.

Mais le théorème auquel on parvient ainsi se complique, à cause du rôle qu'y jouent les plans cycliques du cône; il n'a ni la simplicité ni l'utilité de celui de M. Liouville, et je ne crois pas devoir le mentionner ici.