J.-J.-A. MATHIEU

Note relative à l'approximation des moyennes géométriques par des séries de moyennes arithmétiques et de moyennes harmoniques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 529-531

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__529_0>

NOTE RELATIVE A L'APPROXIMATION DES MOYENNES GÉOMÉTRIQUES PAR DES SÉRIES DE MOYENNES ARITHMÉTIQUES ET DE MOYENNES HARMONIQUES ;

Par M. J.-J.-A. MATHIEU,
Lieutenant-Colonel d'Artillerie, Directeur de l'École d'Artillerie de Toulouse.

D'intéressants travaux de M. Alexéeff (voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, août 1879, p. 403) avaient, depuis quelque temps déjà, attiré l'attention sur une méthode d'extraction de la racine carrée du produit de deux quantités, qui résulte du calcul de moyennes arithmétiques et de moyennes harmoniques successives. M. Lucas vise la même méthode, qu'il croit d'ailleurs avoir été connue des anciens, en proposant la question 1325, ainsi formulée dans la livraison de septembre 1879 des *Nouvelles Annales de Mathématiques :*

On prend la moyenne arithmétique p_1 *et la moyenne harmonique* q_1 *de deux quantités* p *et* q : $p_1 = \frac{p+q}{2}$, $q_1 = \frac{2pq}{p+q}$; *on opère de même sur* p_1 *et* q_1, *puis sur* p_2 *et* q_2, *et ainsi de suite, de telle manière que* $p_{n+1} = \frac{p_n + q_n}{2}$, $q_{n+1} = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n}$.

Trouver l'expression générale de p_n *en fonction de* p *et* q; *montrer qu'on a* $p_1 > p_2 > p_3 > \ldots > \sqrt{pq}$, *et* $q_1 < q_2 < q_3 < \ldots < \sqrt{pq}$.

La dernière partie de cette question, c'est-à-dire le principe sur lequel repose la méthode d'approximation, devient de vérité évidente sur la figure bien simple que voici.

Prenons à partir d'un point O, sur un axe, les longueurs $OP = p$, $OQ = q$, en supposant $p > q$; sur $PQ = p - q$, comme diamètre, décrivons un cercle, et menons les deux tangentes $OT = OT' = \sqrt{pq}$. Le centre P_1 de ce cercle fera connaître la moyenne arithmétique $p_1 = \frac{p+q}{2} = OP_1$; le point Q_1 d'intersection de l'axe avec la corde des contacts TT' fera connaître la moyenne harmonique $q_1 = \frac{2pq}{p+q} = OQ_1$; enfin, si du point O comme centre avec $OT = \sqrt{pq}$ comme rayon, on décrit un cercle, le point X d'intersection avec l'axe donnera $OX = \sqrt{pq}$.

Le point X étant nécessairement compris entre P_1 et Q_1, on aura $p_1 > \sqrt{pq} > q_1$.

Si la même construction est répétée avec les points P_1 et Q_1, le point X ne changera pas, attendu que

$$pq = p_1 q_1 = OP.OQ = OP_1.OQ_1;$$

on aura donc encore

$$p_2 > \sqrt{pq} > q_2,$$

et ainsi de suite indéfiniment.

Le rayon $\frac{1}{2}(p_n - q_n)$ du cercle qui renferme toujours le point X suit une loi de décroissance plus rapide que celle d'une progression géométrique dont la raison serait $\frac{1}{2}$, car le diamètre de rang n est plus petit que le rayon de rang $n - 1$, d'après la figure.

Quant aux formules qui expriment les quantités p_n, q_n

et $\frac{1}{2}(p_n - q_n)$, elles peuvent être données sous une forme concise, en se servant des notations que je vais indiquer.

Représentons par S_{2^n} la somme des puissances de degré 2^n des racines de l'équation

$$x^2 - (p+q)x + \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = 0$$

et par D_{2^n} la différence de ces mêmes puissances, de telle sorte que

$$S_{2^n} = \left(\frac{p+q}{2} + \sqrt{pq}\right)^{2^n} + \left(\frac{p+q}{2} - \sqrt{pq}\right)^{2^n},$$

et

$$D_{2^n} = \left(\frac{p+q}{2} + \sqrt{pq}\right)^{2^n} - \left(\frac{p+q}{2} - \sqrt{pq}\right)^{2^n}.$$

On aura, en vertu des propriétés des fonctions S_{2^n} et D_{2^n},

$$p_n = \frac{S_{2^{n-1}}}{2 S_{2^{n-2}} S_{2^{n-3}} \ldots S_2 S_1} = \frac{S_{2^{n-1}}}{D_{2^{n-1}}} \sqrt{pq},$$

$$q_n = \frac{pq}{p_n} = \frac{D_{2^{n-1}}}{S_{2^{n-1}}} \sqrt{pq},$$

$$\frac{1}{2}(p_n - q_n) = \frac{\left(\frac{p-q}{2}\right)^{2^n}}{S_{2^{n-1}} S_{2^{n-2}} \ldots S_2 S_1}$$

$$= \frac{2\left(\frac{p-q}{2}\right)^{2^n}}{D_{2^n}} = \left(\frac{S^2_{2^{n-1}} - D^2_{2^{n-1}}}{S_{2^{n-1}} D_{2^{n-1}}}\right) \sqrt{pq}.$$

Ces formules sont générales, pourvu que la valeur de S_{2^k} soit prise égale à 1 lorsque l'exposant k de 2 devient négatif dans l'indice.

Note. — La même question (1325) a été résolue par M. H.-J. Krantz.