NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LIONNET

Note sur la série $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$;

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 509-513

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__509_1>

NOTE SUR LA SÉRIE

$$(1) \qquad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots;$$

PAR M. LIONNET.

I. On sait que cette série, que nous pouvons mettre sous la forme

$$(2) \quad \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \ldots,$$

en considérant chaque binôme entre parenthèses comme un seul terme, est convergente, et qu'elle a pour limite le logarithme népérien du nombre 2.

II. Cela étant, nous allons démontrer que la série

$$(3) \quad \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \ldots,$$

qu'on déduit de la série (1) en faisant suivre son premier terme positif de ses deux premiers termes négatifs, puis son second terme positif de ses troisième et quatrième termes négatifs, etc., est aussi convergente, et qu'elle a pour limite $\frac{1}{2}\log 2$.

En réduisant à un seul les deux premiers termes de chaque trinôme entre parenthèses, la série (3) prend la forme

$$(4)\quad \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{14}-\frac{1}{16}\right)+\ldots,$$

et, comme chacun des termes de cette série est la moitié du terme de même rang dans la série (2) qui est convergente et a pour limite $\log 2$ (I), il en résulte que la série (4), et par suite la série (3), est aussi convergente, et qu'elle a pour limite $\frac{1}{2}\log 2$.

Cet exemple est, je crois, le plus simple qu'on puisse donner de l'influence que peut avoir sur la valeur d'une série le changement introduit dans l'ordre de ses termes.

III. On sait que la série

$$(5)\quad \left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\right)+\ldots,$$

qu'on déduit de la série (1) en faisant suivre ses deux premiers termes positifs de son premier terme négatif, puis ses troisième et quatrième termes positifs de son second terme négatif, etc., est convergente, et qu'elle a pour limite $\frac{3}{2}\log 2$. Voici comment on peut le démontrer au moyen des séries (2) et (4).

On voit immédiatement que, dans la somme des deux premiers termes de la série (2) et du premier terme de la série (4), les fractions $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ se détruisent, tandis que les deux fractions égales à $-\frac{1}{4}$ donnent la fraction $-\frac{1}{2}$, d'où il suit que cette somme devient le premier terme de la série (5). On voit de même que la somme des troisième et quatrième termes de la série (2) et du second terme de la série (4) est égale au deuxième terme de la série (5), et ainsi de suite, de sorte que, en général, la somme des $2n$ premiers termes de la série (2) et des n premiers termes de la série (4) est égale à la somme des n premiers termes de la série (5). Or, quand n croît indéfiniment, les deux premières sommes convergent (I et II), vers les limites $\log 2$ et $\frac{1}{2}\log 2$; donc la troisième somme ou la série (5) converge en même temps vers

$$\log 2 + \frac{1}{2}\log 2 \text{ ou } \frac{3}{2}\log 2.$$

IV. Enfin la série

$$(6)\quad \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\right)+\ldots,$$

qu'on déduit de la série (1) en faisant suivre son premier terme positif de son premier terme négatif, puis ses deuxième et troisième termes positifs de son deuxième terme négatif, puis ses quatrième, cinquième et sixième termes positifs de son troisième terme négatif, etc., est divergente.

On sait 1° que la somme des n premiers nombres positifs égale $\frac{1}{2}n(n+1)$, 2° que la somme des n premiers nombres impairs égale n^2. 3° nous allons démontrer ce théorème, moins généralement connu que les deux précédents :

Si l'on partage la suite des nombres impairs 1, 3, 5,... *en* n *tranches à partir de la gauche, de sorte que la première contienne un terme, la deuxième deux, la troisième trois, etc., la somme des* n *termes de la* $n^{ième}$ *tranche égalera* n^3.

En effet, (1°) le nombre total des termes des n premières tranches égale $\frac{1}{2} n(n+1)$, et celui des termes des $n-1$ premières tranches égale $\frac{1}{2} n(n-1)$; donc la somme des n termes de la $n^{\text{ième}}$ tranche égale (2°) la différence des carrés des deux nombres de termes précédents ou

$$\frac{1}{4}n^2[(n+1)^2-(n-1)^2]=n^3.$$

4° On sait que la moyenne arithmétique $\frac{s}{n}$ de n nombres positifs et *inégaux entre eux* excède leur moyenne géométrique $\sqrt[n]{p}$, d'où il résulte (5°) que la somme I des inverses de n nombres positifs et *inégaux entre eux* excède le quotient de n^2 par s. En effet, on a (4°)

$$\mathrm{I}>\frac{n}{\sqrt[n]{p}}>\frac{n}{\left(\frac{s}{n}\right)}=\frac{n^2}{s}.$$

Cela étant, on voit que, n désignant le nombre des termes positifs entre deux parenthèses quelconques dans la série (6), le terme général de cette série excède

$$\frac{n^2}{n^3}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n},$$

qui est le terme général de la série divergente

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \ldots;$$

donc, à plus forte raison, la série (6) est aussi divergente.

Remarque. — M. Laisant, dans sa réponse (p. 330) à la question (1294) que j'ai proposée, a donné deux démonstrations du théorème (5°), dont la seconde, qui m'était inconnue, est directe et très rigoureuse, mais me paraît moins simple que la première.