G. DE LONGCHAMPS

Sur la limite des racines réelles d'une équation de degré quelconque

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 49-57

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__49_0>

SUR LA LIMITE DES RACINES RÉELLES D'UNE ÉQUATION DE DEGRÉ QUELCONQUE;

PAR M. G. DE LONGCHAMPS,
Professeur de Mathématiques spéciales au collége Rollin.

On sait que les limites supérieures et inférieures des racines positives et négatives d'une équation donnée forment quatre nombres, dont la recherche se ramène, par la considération de l'équation aux inverses et de la transformée en $-x$, à celle de la seule limite supérieure des racines positives. Nous nous proposons d'exposer ici une méthode qui permet de déterminer celle-ci par un procédé que nous croyons nouveau et qui nous paraît simple et avantageux.

1. Soit l'équation

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0.$$

Elle peut s'écrire

$$x^{m-2}(x^2 + A_1 x + A_2) + x^{m-5}(A_3 x^2 + A_4 x + A_5) + \ldots = 0.$$

Supposons que tous les coefficients A_3, A_6, A_9, ... soient positifs, et considérons les équations

$$\begin{aligned} x^2 + A_1 x + A_2 &= 0,\\ A_3 x^2 + A_4 x + A_5 &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si α représente la plus grande des racines positives de ces différentes équations, il est clair que α et toute valeur supérieure étant substituée à x dans l'équation proposée donneront un résultat positif. Ainsi α sera une limite supérieure des racines positives.

2. L'objection que soulève aussitôt cette méthode de groupement, c'est que les coefficients $A_3, A_6, \ldots$, ou tout au moins quelques-uns d'entre eux, peuvent être nuls ou négatifs. Nous allons indiquer comment, dans cette hypothèse, on doit modifier le groupement des termes.

Supposons A_3 négatif, par exemple. L'équation proposée peut s'écrire

$$x^{m-2}(x^2 + A_1 x + A_2 - \lambda) + x^{m-4}(\lambda x^2 + A_3 x + A_4) + \ldots = 0,$$

λ désignant un nombre arbitraire, mais que nous supposerons positif. Cette transformation ayant été faite autant de fois que la chose sera nécessaire, on n'aura plus à considérer que des trinômes dont les premiers termes seront tous positifs et auxquels on pourra, par conséquent, appliquer la remarque que nous avons faite tout à l'heure.

3. L'introduction de ces arbitraires λ donne à cette méthode, qu'on pourrait, pour la distinguer des autres, nommer *méthode par la décomposition en trinômes*, un caractère particulier, tout à son avantage, et que nous voulons mettre en lumière. Au lieu d'effectuer, comme dans les méthodes connues, des calculs bien déterminés et dont il faut, en quelque sorte, subir la loi, on comprend qu'on pourra, par le choix plus ou moins habile qui sera fait des indéterminées, obtenir des limites plus ou moins avantageuses, c'est-à-dire plus ou moins petites. Nous allons éclaircir ce point important par un ou deux exemples numériques.

Considérons d'abord l'équation

$$x^7 + 4x^6 - 10x^5 - 13x^4 + 7x^3 + 12x^2 - 9 = 0 \ (*);$$

(*) BRIOT, *Algèbre*; 2e Partie, 8e édition, p. 293 et 295.

elle peut s'écrire

$$(1)\quad \begin{aligned} & x^5(x^2+4x-10-\lambda) \\ & \quad + x^3(\lambda x^2-13x+7)+(12x^2-9)=0. \end{aligned}$$

Elle est ainsi décomposée en trois trinômes; le dernier ne nous occupera pas, $x = 1$ et les nombres supérieurs à 1 le rendant positif. Considérons les deux autres,

$$\begin{aligned} \mathrm{T} &= x^2+4x-10-\lambda, \\ \mathrm{T}' &= \lambda x^2-13x+7. \end{aligned}$$

La racine positive de $\mathrm{T} = 0$ est

$$\alpha = \sqrt{14+\lambda}-2,$$

et la plus grande racine positive de $\mathrm{T}' = 0$, quand cette équation a ses racines réelles, est

$$\alpha' = \frac{13+\sqrt{169-28\lambda}}{2\lambda},$$

et l'on doit prendre pour limite supérieure des racines positives le plus grand des deux nombres α, α'. La valeur de λ qu'il faut choisir, celle qui donne la plus petite limite, est celle qui satisfait à l'équation $\alpha = \alpha'$.

En effet, quand λ croît en partant de zéro, α va constamment en augmentant et α' en diminuant. Soit λ' la valeur de λ qui rend $\alpha = \alpha'$; si l'on prend pour λ une valeur plus petite que λ', on aura pour α' une valeur plus grande que celle qui correspond à λ'; au contraire, si l'on prend $\lambda > \lambda'$, on aura pour α une valeur plus grande que celle qu'on a obtenue en prenant $\lambda = \lambda'$. Dans l'un et l'autre cas, comme on doit prendre pour la limite cherchée le plus grand des deux nombres α et α', on aura donc pour cette limite un nombre plus grand que celui qu'on avait trouvé avec l'hypothèse $\lambda = \lambda'$.

4. Dans la pratique, la détermination de ce qu'on pourrait nommer *la valeur avantageuse de* λ, résultant d'une équation $\alpha = \alpha'$, qui est ordinairement d'un degré supérieur au second, offrira des difficultés qu'il ne faut pas chercher à surmonter autrement que *par à peu près* et comme nous allons l'indiquer. La recherche qui nous occupe doit, en effet, être faite par des calculs simples et suffisamment rapides, quoique conduisant pourtant à un nombre aussi voisin que possible de la plus grande racine positive. La meilleure méthode est évidemment celle qui sait concilier ces deux intérêts contraires.

Dans l'équation (1), donnons à λ les valeurs successives $1, 2, \ldots$, et pour chacune d'elles calculons les valeurs correspondantes de α et de α', valeurs calculées rapidement, par à peu près, en remplaçant les quantités incommensurables qu'on rencontre par des nombres commensurables supérieurs et faciles à voir. On pourra former le tableau suivant :

λ	α	α'
1	2	12,5
2	2	6
3	2,2	4
4	2,3	2,6
5	2,4	1,9
.	.	.
.	.	.
.	.	.

En considérant la valeur $\lambda = 4$, on a pour limite 2,6. On voit aussi que la valeur avantageuse de λ est comprise entre 4 et 5. Si l'on veut avoir une limite moins élevée, il faut donner à λ les valeurs successives

$$4,1, \quad 4,2, \quad 4,3, \quad \ldots$$

et former le tableau suivant :

λ	α	α'
4,1	2,26	2,5
4,2	2,27	2,41
4,3	2,27	2,33
4,4	2,29	2,25
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Il résulte de ce tableau que 2,29 est une limite supérieure des racines positives de l'équation, et que la valeur avantageuse de λ est comprise entre 4,3 et 4,4. En donnant à λ les valeurs successives 4,31, 4,32, ..., on trouverait une limite moins élevée.

5. Considérons encore, pour bien faire comprendre l'avantage qu'on peut tirer de l'introduction des arbitraires, l'équation

$$6x^5 + 24x^4 - x^3 + 8x^2 - 16x - 60 = 0 \text{ (*)}.$$

On peut l'écrire

$$x^3(6x^2 + 24x - 1) + (8x^2 - 16x - 60) = 0,$$

et, en lui appliquant notre méthode, on trouve pour la limite

$$\frac{2 + \sqrt{34}}{2},$$

ou, *a fortiori*, en remplaçant 34 par 36, $\frac{2+6}{2} = 4$. La méthode de Newton, appliquée à cet exemple, donne une limite égale à 2. Nous allons faire voir que l'introduction

(*) CATALAN, *Manuel des candidats à l'École Polytechnique*, p. 155.

des arbitraires peut donner cette limite 2 et même une limite plus faible.

Écrivons l'équation sous la forme

$$x^3(6x^2+24x-\lambda)$$
$$+x[(\lambda-1)x^2+8x-\mu]+[(\mu-16)x-60]=0.$$

En choisissant

$$\lambda=72 \quad \text{et} \quad \mu=46,$$

on voit que $x=2$ est une limite supérieure des racines positives. Mais on peut choisir plus avantageusement les paramètres λ, μ; déterminons-les, en effet, de façon que les équations

$$\text{(A)} \qquad \left\{\begin{array}{l}(\mu-16)x-60=0,\\ 6x^2+24x-\lambda=0\end{array}\right.$$

soient satisfaites par $x=1$; on trouve alors

$$\lambda=30, \quad \mu=76.$$

Le second trinôme est alors

$$29x^2+8x-76,$$

et la racine positive de ce trinôme égalé à zéro est

$$\frac{\sqrt{2220}-4}{29},$$

nombre plus petit que $\frac{3}{2}$: donc $\frac{3}{2}$ est une limite.

Pour obtenir une limite plus approchée, on disposera de λ et de μ, de façon que les équations (A) soient satisfaites pour une valeur de x intermédiaire entre le nombre 1 primitivement choisi et la limite $\frac{3}{2}$, par exemple pour

$x = \frac{5}{4}$. On trouve alors

$$\lambda = \frac{315}{8}, \quad \mu = 64,$$

et pour la limite $\frac{368}{307}$, ou, *a fortiori*, 1,2, nombre très-voisin de la plus grande racine positive, puisque l'équation proposée a une racine supérieure à 1.

6. Nous indiquerons, en terminant cette Note, le procédé général qui permet d'introduire les indéterminées λ et de leur assigner des valeurs avantageuses.

L'équation générale peut toujours s'écrire

$$\left.\begin{array}{l} x^{m-2}\left(x^2 + A_1 x + A_2 - \lambda_1\right) \\ + x^{m-4}\left(\lambda_1 x^2 + A_3 x + A_4 - \lambda_2\right) \\ + x^{m-6}\left(\lambda_2 x^2 + A_5 x + A_6 - \lambda_3\right) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Lorsque m est pair, il y a $\frac{m-2}{2}$ arbitraires λ ; si m est impair, $\frac{m-1}{2}$. Le dernier trinôme, dans ce cas, se réduit à un binôme du premier degré en x. Dans tous les cas, les équations

$$(\mathrm{B}) \qquad \left\{\begin{array}{l} x^2 + A_1 x + A_2 - \lambda_1 = 0, \\ \lambda_1 x^2 + A_3 x + A_4 - \lambda_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

forment, en considérant

$$x, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

comme des inconnues, un système d'équations simultanées bien défini, parce qu'il y a autant d'équations indépendantes que d'inconnues. Si l'on pouvait trouver une solution de ce système, on aurait donc une racine x de l'équation donnée, et, si x était la plus grande racine positive, on peut dire que le problème qui nous occupe serait résolu *dans sa perfection*. La méthode que nous venons d'exposer a pour but de réaliser par tâtonnements et approximativement la résolution du système (B).

Ayant trouvé une première limite x_1, pour obtenir une limite moins élevée, on remplace x par x_2 dans les équations (B) (en supposant $x_2 < x_1$). On déterminera les paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, et il restera une dernière équation β, ne renfermant que x. S'il arrive que x_2 soit la plus grande racine positive des équations qui ont donné $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, et si la plus grande racine positive de la dernière équation β est, elle aussi, plus grande que x_2, x_2 sera une nouvelle limite supérieure des racines positives de l'équation. Il faut aussi, bien entendu, que les paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ soient tous positifs.

Nous ferons une dernière remarque. En écrivant l'équation générale sous la forme

$$x^{m-1}(x + A_1 - \lambda_1) + x^{m-2}(\lambda_1 x + A_2 - \lambda_2) + \ldots,$$

et considérant le système défini

$$\begin{gathered} x + A_1 - \lambda_1 = 0, \\ \lambda_1 x + A_2 - \lambda_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

dans lequel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sont des nombres positifs, le nombre x qui rend ces différents binômes nuls ou positifs est une limite supérieure des racines positives. A ce groupement correspond une méthode, qu'on peut nommer *méthode par la décomposition en binômes*. Elle offre sur la précédente l'avantage de ne donner lieu qu'à des équations du premier degré; mais elle présente l'inconvénient d'exiger la considération de $(m - 1)$ équations simultanées. La décomposition en polynômes d'un degré supérieur au second est en général impraticable, pour des motifs évidents; c'est donc la méthode par décomposition en trinômes qui nous paraît la plus avantageuse.