DESBOVES

Mémoire sur la résolution en nombres entiers de l'équation $aX^m + bY^m = cZ^n$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 481-499

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__481_0>

MÉMOIRE SUR LA RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS DE L'ÉQUATION

$$aX^m + bY^m = cZ^n;$$

PAR M. DESBOVES.

[SUITE (*).]

V. — THÉORÈMES GÉNÉRAUX RELATIFS A LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION

$$aX^m + bY^m = cZ^n.$$

19. Dans ce qui va suivre, nous dirons que deux fonctions entières $f(X, Y, \ldots)$, $\varphi(x, y, \ldots)$ sont équivalentes lorsque la deuxième se déduit de la première en remplaçant dans celle-ci X, Y,... par des fonctions entières de $x, y, \ldots$, ou qu'après la substitution les deux fonctions ne diffèrent l'une de l'autre que par un facteur qui est une certaine puissance d'une fonction entière. C'est ainsi, par exemple, qu'en vertu de l'identité (40) les deux fonctions $X^3 + Y^3$ et $xy(x+y)$ sont équivalentes.

THÉORÈME X. — *Pour que l'équation*

$$aX^m + bY^m = cZ^n$$

ait une solution entière, il faut et il suffit que c soit de la forme $ax^m + by^m$.

En effet, la condition est suffisante, puisque, si elle est remplie, l'équation proposée admet la solution $(x, y, 1)$. Elle est aussi nécessaire, car, si (x_1, y_1, z_1) est une solu-

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVIII, p. 433.

tion de l'équation, on a

$$a x_1^m + b y_1^m = c z_1^n ;$$

d'où il suit que, si on laisse de côté le facteur z_1^n, c est bien de la forme demandée.

Si l'on considère le cas particulier où m et n sont égaux à 3 et a, b égaux à 1, on obtient la forme $x^3 + y^3$; mais les deux formes $xy(x+y)$ et x^3+y^3 étant équivalentes, comme on l'a déjà remarqué, on peut dire, avec M. Lucas, que, pour que l'équation $X^3 + Y^3 = cZ^3$ puisse être résolue en nombres entiers, il faut et il suffit que c, débarrassé de ses facteurs cubiques, soit de la forme $xy(x+y)$.

Remarque. — Toutes les formes de c que nous avons données, si nombreuses qu'elles soient, sont équivalentes à la forme $ax^m + by^m$, mais elles n'en sont pas moins utiles à connaître, car elles serviront à faire connaître *a priori* des solutions entières des équations, comme on le verra dans la Section suivante, consacrée aux applications numériques.

Théorème XI. — *a et b étant arbitraires dans l'équation $aX^m + bY^m = cZ^n$, on peut toujours trouver une fonction c de a, b et d'autant de variables que l'on veut, telle que l'équation puisse être résolue en nombres entiers.*

On voit d'abord aisément que, dans le produit représenté par le déterminant du n° 7, la partie qui est fonction des seules variables x_0, x_1 est $x_0^m - (-1)^m r x_1^m$; c'est encore ce que l'on reconnaît comme il suit.

En appelant Q la partie du produit qu'il s'agit de déterminer, on a

$$Q = (x_0 + \alpha x_1)(x_0 + \beta x_1)(x_0 + \gamma x_1)\ldots,$$

ou, en posant

$$\frac{x_0}{x_1} = -\xi,$$

$$\begin{aligned} Q &= (-1)^m x_1^m (\xi - \alpha)(\xi - \beta)\ldots = (-1)^m x_1^m (\xi^m - r) \\ &= x_1^m [(-\xi)^m - (-1)^m r] \qquad = x_0^m - (-1)^m r x_1^m. \end{aligned}$$

Cela posé, si l'on multiplie entre elles d'abord n fonctions égales de l'espèce de celle qui est représentée par le déterminant du n° 7, puis ce produit lui-même par le produit d'un nombre quelconque p de fonctions de même espèce que la première, mais différentes de celles-ci et non égales entre elles, on obtient finalement un produit qui est une fonction de même espèce que ses facteurs, et, en représentant par Z la fonction élevée à la $n^{\text{ième}}$ puissance, par c le produit des p facteurs différents et par $(X_0)_k, (X_1)_k, \ldots$ les expressions de $X_0, X_1, \ldots$ qui correspondent à la dernière multiplication, on a une équation de cette forme :

$$(75) \qquad [(X_0)_k]^m - (-1)^m r[(X_1)_k]^m + \ldots = cZ^n.$$

En effet, d'après ce qui a été dit précédemment, on sait que le premier membre de l'équation (75) doit contenir les deux termes $(X_0)_k^m$, $-(-1)^m r(X_1)_k^m$.

On peut maintenant disposer des variables introduites par les p derniers facteurs de manière à annuler, dans le premier membre de l'identité (75), tous les termes, excepté les deux premiers. En effet, comme on le voit par les expressions des fonctions $X_0, X_1, X_2, \ldots$ données dans le n° 7, les équations à résoudre sont du premier degré, par rapport aux variables qui correspondent à l'un des p derniers facteurs.

Alors, en substituant dans l'équation (75) à ces variables leurs expressions, c deviendra une fonction de toutes les variables, excepté celles par rapport auxquelles on a résolu. Il ne reste plus enfin, pour obtenir l'équation demandée, qu'à remplacer dans l'équation (75) r par $\frac{b}{a}$ ou $-\frac{b}{a}$ suivant que m est impair ou pair.

Une application particulière de la méthode précédente a été faite à la fin du n° 9 ; si on la reprend, ce qui précède deviendra clair.

Dans les deux théorèmes qui vont suivre, on suppose que n est égal à m, c'est-à-dire qu'il s'agira de l'équation

$$aX^m + bY^m = cZ^m. \tag{76}$$

Théorème XII. — *Pour que l'équation* (76) *ait deux solutions, il faut et il suffit qu'après avoir multiplié ou divisé, s'il est nécessaire, les deux membres de l'équation par un même nombre entier, on obtienne pour* a, b, $-c$ *des expressions* $l^m - p^m$, $q^m - r^m$, $s^m - t^m$, l, q, s, p, r, t *étant des nombres entiers tels, que le produit des trois premiers soit égal au produit des trois autres.*

On remarque d'abord que l'on peut toujours obtenir une infinité d'équations de la forme (76) admettant deux solutions. En effet, si l'on écrit que l'équation (76) a les deux solutions (x, y, z), (x', y', z'), on obtient deux équations du premier degré, par rapport à $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$, qui donnent les valeurs de ces inconnues, et l'on peut prendre

$$\left\{\begin{aligned} a &= z^m y'^m - y^m z'^m, \\ b &= x^m z'^m - z^m x'^m, \\ -c &= y^m x'^m - x^m y'^m. \end{aligned}\right. \tag{77}$$

Ainsi a, b, $-c$ sont chacun la différence des $m^{\text{ièmes}}$ puissances de deux nombres entiers, et si l'on représente zy', xz', yx', yz', zx', xy' respectivement par l, q, s, p, r, t, on a bien

$$lqs = prt; \tag{78}$$

la condition énoncée est donc nécessaire. Je dis maintenant qu'elle est suffisante. En effet, supposons qu'après avoir multiplié ou divisé les deux membres de l'équation (76) par un facteur constant, on ait

$$a = l^m - p^m, \quad b = q^m - r^m, \quad -c = s^m - t^m, \quad lqs = prt;$$

on pose

$$(79) \qquad \begin{cases} zy' = l, & yz' = p, & xz' = q, \\ zx' = r, & yx' = s, & xy' = t, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$\frac{x}{z} = \frac{t}{l}, \quad \frac{y}{z} = \frac{s}{r}, \quad \frac{x}{y} = \frac{q}{p},$$

la dernière équation étant la conséquence des deux autres à cause de la relation (78).

Alors, pour obtenir des valeurs entières, on peut poser

$$(80) \qquad x = rt, \quad y = ls, \quad z = lr.$$

Si maintenant on substitue dans les équations (76) les valeurs de x, y, z (80), on a

$$x' = \frac{1}{l}, \quad y' = \frac{1}{r}, \quad z' = \frac{p}{sl},$$

ou encore, comme on ne prend que des valeurs entières,

$$(81) \qquad x' = sr, \quad y' = ls, \quad z' = pr.$$

Ainsi, lorsque les conditions de l'énoncé sont remplies, l'équation (76) a deux solutions entières (x, y, z), (x', y', z') données par les formules (80) et (81).

Remarque. — On voit aisément que le théorème n'est en défaut que si l'on a

$$(82) \qquad l = q, \quad p = r, \quad r^2 t = l^2 s;$$

dans ce cas, les deux solutions données par les formules

(80) et (81) n'en font plus qu'une seule. C'est ainsi, par exemple, que si l'on a l'équation

$$X^m + Y^m = (\alpha^m + \beta^m) Z^m,$$

ou

$$(\alpha^m - \beta^m) X^m + (\alpha^m - \beta^m) Y^m = (\alpha^{2m} - \beta^{2m}) Z^m,$$

pour laquelle les conditions de l'énoncé du théorème XII sont remplies, les formules (80) et (81) donnent la solution unique $(\alpha, \beta, 1)$.

Faisons une application du théorème XII à l'équation

$$X^4 - Y^4 = 1174935 Z^4.$$

On a les identités numériques

$$1174935 = \frac{79^4 - 67^4}{2^4}, \quad 2^4(79^4 - 67^4) = 133^4 - 59^4,$$

$$(79^4 - 67^4)(59^4 - 134^4) = (79 \times 59)^4 - 133 \times 67)^4;$$

alors, si l'on multiplie les deux membres de l'équation proposée par $118^4 - 268^4$, il vient

$$(118^4 - 268^4) X^4 + (316^4 - 266^4) Y^4$$
$$= [(79 \times 59)^4 - (133 \times 67)^4] Z^4,$$

et l'on a

$$l = 118, \quad q = 316, \quad s = 133 \times 67,$$
$$p = 268, \quad r = 266, \quad t = 79 \times 59.$$

On voit que la condition (78) est remplie, et, en appliquant les formules (80) et (81), on reconnaît que l'équation proposée admet les deux solutions (79, 67, 2), (133, 59, 4) (*).

(*) On s'appuie ici sur la résolution de l'équation $X^4 + Y^4 = Z^4 + U^4$, et sur la relation $(a^4 - b^4)(d^4 - b^4) = (ad)^4 - (bc)^4$, qui a lieu lorsque a, b, c, d sont des nombres tels que l'équation $a^4 - b^4 = c^4 - d^4$ soit satisfaite. Je reviendrai plus tard sur cette question.

Théorème XIII. — *Pour que l'on puisse trouver des équations de la forme (76) qui, pour une certaine valeur de m, admettent trois solutions, il faut et il suffit que l'on puisse résoudre en nombres entiers le système des deux équations*

$$P^m + Q^m + R^m = U^m + V^m + T^m, \tag{83}$$

$$PQR = UVT. \tag{84}$$

1° *La condition est nécessaire.* — En effet, si l'équation (76) admet les deux solutions (x, y, z), (x', y', z'), les valeurs de a, b, c sont données par les formules (77), et l'on exprime que la même équation a une troisième solution (x'', y'', z'') en écrivant

$$\begin{aligned}(z^m y'^m - y^m z'^m) x''^m &+ (x^m z'^m - z^m x'^m) y''^m \\ &= (x^m y'^m - y^m x'^m) z''^m,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}(zy'x'')^m &+ (xz'y'')^m + (yx'z'')^m \\ &= (yz'x'')^m + (zx'y'')^m + (xy'z'')^m.\end{aligned}$$

Or, comme les six nombres $zy'x''$, $xz'y''$, $yx'z''$, $yz'x''$, $zx'y''$, $xy'z''$ sont tels que le produit des trois premiers est égal au produit des trois autres, ces nombres satisfont aux deux équations (83) et (84).

2° *La condition est suffisante.* — En effet, supposons qu'elle soit remplie pour les six nombres d, e, f, g, h, k, c'est-à-dire que l'on ait

$$d^m + e^m + f^m = g^m + h^m + k^m, \quad def = ghk.$$

On pose

$$zy'x'' = d, \quad xz'y'' = e, \quad yx'z'' = f, \quad y'z'x'' = g,$$
$$zx'y'' = h, \quad xy'z'' = k,$$

et l'on en déduit

$$x' = ghx, \quad y' = dey, \quad z' = egz, \tag{85}$$

$$x'' = ghx, \quad y'' = ehy, \quad z'' = efz. \tag{86}$$

Ainsi, lorsque les équations (83) et (84) sont satisfaites par six nombres entiers d, e, f, g, h, k, on peut former une équation de la forme (76) qui admette une solution arbitraire (x, y, z) et deux autres solutions (x', y', z'), (x'', y'', z'') données par les formules (85) et (86).

Faisons une application du théorème au cas où m est égal à 3. A l'aide de l'identité en x, y qui a conduit aux formules (51) du n° **11**, j'obtiens d'abord les six nombres 33, -34, 1, 11, -17, 6 pour lesquels on a

$$33^3 + (-34)^3 + 1 = 11^3 + (-17)^3 + 6^3,$$
$$33 \times (-34) \times 1 = 11 \times (-17) \times 6.$$

Je prends ensuite arbitrairement

$$x = 1, \quad y = -1, \quad z = 1,$$

et si l'on pose

$$d = 33, \quad e = -34, \quad f = 1, \quad g = 11, \quad h = -17, \quad k = 6,$$

les formules (85) et (86) donnent, après la suppression de facteurs communs,

$$x' = 1, \quad y' = -6, \quad z' = 2,$$
$$x'' = 11, \quad y'' = 34, \quad z'' = 2.$$

Mais, en calculant les valeurs de a, b, c par les formules (77), où l'on fait $m = 3$, on obtient l'équation

$$208 X^3 - 7 Y^3 = 215 Z^3;$$

on est donc assuré d'avance que cette équation admet les trois solutions $(1, -1, 1)$, $(1, -6, 2)$, $(11, 34, 2)$.

Comme, jusqu'à présent, on ignore si le système des équations (83) et (84) peut être résolu pour des valeurs de m supérieures à 3, on ne sait pas non plus si, pour de pareilles valeurs de m, l'équation (76) peut avoir trois solutions. Quoi qu'il en soit, le théorème précédent montre que la question de résoudre le système des deux équations (83) et (84) présente le plus grand intérêt.

THÉORÈME XIV. — *On peut résoudre en nombres entiers l'équation*

$$X^{4m} - a^2 Y^{4m} = Z^2,$$

ou, ce qui revient au même, le système des deux équations

$$(87) \qquad X^{2m} + aY^{2m} = U^2, \quad X^{2m} - aY^{2m} = V^2,$$

lorsque a *est de la forme* $\dfrac{(x+yi)^{4m} - (x-yi)^{2m}}{2i}$ (*i représente* $\sqrt{-1}$).

En effet, si l'on pose

$$p + qi = (x + yi)^m, \quad p - qi = (x - yi)^m,$$

on a

$$p^2 + q^2 = (x^2 + y^2)^m, \quad 2p = (x + yi)^m + (x - yi)^m,$$

$$2qi = (x + yi)^m - (x - yi)^m,$$

$$2(p^2 - q^2) = (x + yi)^{2m} + (x - yi)^{2m},$$

et, par suite,

$$4pq(p^2 - q^2) = \frac{(x + yi)^{4m} - (x - yi)^{4m}}{2i}$$

$$p^2 - q^2 \pm 2pq = \frac{(1 \mp i)(x + yi)^{2m} + (1 \pm i)(x - yi)^{2m}}{2},$$

les signes supérieurs se correspondant dans les deux membres de l'équation précédente, ainsi que les signes inférieurs.

Cela posé, dans les équations (60) et (61) du n° 14, changeons x et y en p et q, puis remplaçons dans les équations ainsi transformées $p^2 + q^2$, $4pq(p^2 - q^2)$,

$p^2 - q^2 \pm 2pq$ par les expressions précédentes; on a alors la double identité

$$(x^2+y^2)^{2m} \pm \frac{(x+yi)^{4m}-(x-yi)^{4m}}{2i} \times 1^{2m}$$
$$= \frac{[(1 \mp i)(x+yi)^{2m} + (1 \pm i)(x-yi)^{2m}]^2}{2},$$

en faisant correspondre dans les deux membres les signes supérieurs ainsi que les signes inférieurs : le théorème est donc démontré.

Remarque. — Si l'on admet qu'on ne peut satisfaire à l'équation $x^2+y^2 = z^{2m}$ qu'en posant

$$x+yi = (p+qi)^{2m}, \quad x-yi = (p-qi)^{2m}, \quad z = p^2+q^2,$$

on démontrera aisément que la condition donnée pour a (théorème XIV) est à la fois nécessaire et suffisante.

20. *Généralisation des nombres congruents.* — Lorsque m est égal à 1 dans les équations (87), le nombre a est dit *congruent* par rapport à deux carrés. Alors on peut convenir d'appeler *nombre congruent de l'ordre m* le nombre a, tel que les équations (87) puissent être satisfaites simultanément.

Si l'on fait d'abord m égal à 1 dans l'expression générale de a, on trouve $xy(x^2-y^2)$ après la suppression du facteur carré 4 : c'est ce que l'on savait déjà. Si ensuite on fait m égal à 2, on trouve pour a, après avoir divisé par 2^4, $\frac{xy(x^2-y^2)[(x^2-y^2)^2-4x^2y^2]}{2}$. En donnant dans cette expression à x et y les valeurs 2 et 1, on obtient pour valeur de a le nombre 21, qui est le plus petit nombre congruent du second ordre.

VI. — Applications numériques des identités et des formules.

21. *Résolution de quelques équations numériques comprises dans l'équation générale*

$$(88)\qquad X^3 + Y^3 = cZ^3.$$

On a vu que l'équation (88) peut être résolue lorsque c a l'une des formes suivantes :

$$x^3 + y^3,\quad 2(x^6 + 3y^2),\quad x^3 - y^3 - 3xy(x + 2y),$$
$$xy(x + y),\quad x(y^3 - x),\quad x^9 + y^9 - 3x^3y^3(8x^3 - y^3).$$

Si dans ces expressions on remplace x et y par les nombres entiers les plus simples, pris avec les signes $+$ ou $-$, on reconnaît que l'équation (88) peut être résolue pour les valeurs de c égales à 6, 7, 9, 12, 15, 17, 19, 20, 22, 26, 28, 30, 37.

22. Je vais maintenant m'occuper de quelques équations particulières de la forme (88). Mais il importe de définir d'abord ce que j'entendrai par une *solution initiale* d'une équation numérique à trois inconnues. Je désignerai ainsi une solution de l'équation qui ne peut se déduire d'aucune autre à l'aide des formules qui donnent une suite de solutions correspondant à une première solution connue. Par exemple, on aura une solution initiale de l'équation (88) si cette solution ne peut pas s'obtenir à l'aide des formules (48) et (49), quelle que soit la solution prise pour point de départ.

1° $c = 19$. En substituant successivement, à la place de x et y, 3 et -2 dans $2(x^6 + 3y^2)$, 3 et 1 dans $x^3 - y^3 - 3xy(x + 2y)$, 1 et 2 dans

$$x^9 - y^9 - 3x^3y^3(8x^3 - y^3),$$

on voit, par les identités (39), (42), (47), que l'équation

$$X^3 + Y^3 = 19 Z^3$$

admet les trois solutions $(3, -2, 1)$, $(36, -17, 13)$, $(8, 1, 3)$.

Si maintenant, dans les formules (51) du n° **11**, on fait

$$x = 3, \quad y = -2, \quad z = 1,$$
$$x' = 8, \quad y' = 1, \quad z' = 3,$$

ou

$$x' = 36, \quad y' = -17, \quad z' = 13,$$

on obtient une quatrième solution $(5, 3, 2)$. Des deux solutions $(8, 1, 3)$, $(36, -17, 13)$ on déduirait ensuite, à l'aide des formules (51), une nouvelle solution $(92, 33, 35)$; mais celle-ci s'obtient immédiatement par les formules (48) en partant de la solution $(3, -2, 1)$. Les formules (51) donnent encore la solution $(13301, -1322, 498)$ comme conséquence des deux solutions $(5, 3, 2)$, $(36, -17, 13)$.

On pourrait continuer à chercher de nouvelles solutions au moyen des formules (51); mais, en arrêtant ici le calcul, je dis que les solutions $(8, 1, 3)$, $(3, -2, 1)$, $(36, -17, 13)$, $(13301, -1322, 498)$, $(5, 3, 2)$ sont, toutes les cinq, des solutions initiales.

En effet, on voit d'abord qu'aucune des quatre premières solutions ne peut être déduite des formules (49), qui ne donnent jamais une valeur paire pour une des inconnues x, y et une valeur impaire pour l'autre.

Je dis ensuite que, quelle que soit la solution prise pour point de départ, elle ne peut pas non plus être donnée par les formules (48). En effet, soient (x_n, y_n, z_n), $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ deux solutions consécutives données par les formules (48), et supposons que la solution

$(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ soit d'abord identique avec la solution $(8, 1, 3)$; alors on aura

$$\frac{x_n(x_n^3+2y_n^3)}{-y_n(2x_n^3+y_n^3)}=8,$$

ou, en posant $\frac{x_n}{-y_n}=m$,

$$m^4+16m^3+2m+8=0.$$

Si la solution $(8, 1, 3)$ était donnée par les formules (48), la dernière équation devrait avoir au moins une racine commensurable ; or, comme on reconnaît qu'elle n'en a aucune, on en conclut que la solution $(8, 1, 3)$ ne peut être donnée par les formules (48). On voit, d'une manière toute semblable, que la deuxième, la troisième et la quatrième solution ne peuvent pas être données par les formules (48) ; car, s'il en était autrement, on devrait pouvoir résoudre en nombres commensurables les équations

$$2m^4-6m^3+4m-3=0,$$
$$17m^4-72m^3+34m-36=0,$$
$$1322m^4-26602m^3+2644m-13301=0,$$

ce qui est impossible. Ainsi, il est prouvé que les quatre premières solutions sont des solutions initiales.

Je dis enfin qu'il en est de même de la cinquième solution. En effet, si elle était donnée par les formules (48) ou (49), on aurait à résoudre en nombres commensurables l'une ou l'autre des équations

$$3m^4+10m^3+6m+5=0,$$
$$8m^9+3m^6-31m^3-8=0,$$

ce que l'on reconnaît impossible.

2° $c=37$. En donnant à x, y les valeurs 4 et -3

dans x^3+y^3, 3 et -1 dans $x^3-y^3-3xy(x+2y)$, 2 et 1 dans $x^9+y^9-3x^3y^3(8x^3-y^3)$, on a les trois solutions $(4, -3, 1)$, $(19, 18, 7)$, $(10, -1, 3)$, et à l'aide des formules (51) on obtient les deux autres solutions $(1033, -33, 310)$, $(13683, -9587, 3568)$. On démontre, comme dans le cas précédent, que les cinq solutions peuvent être prises comme solutions initiales, et peut-être y en a-t-il encore d'autres.

23. *Résolution des équations numériques comprises dans l'équation générale*

$$aX^3 + bY^3 = cZ^3. \tag{89}$$

On sait que l'on peut toujours obtenir des équations de la forme (89) qui admettent deux solutions arbitraires, et une troisième solution qu'on en déduit à l'aide des formules (51). On conçoit que l'on puisse ainsi obtenir une infinité d'équations de la forme (89) admettant trois solutions initiales au moins. Si, par exemple, on forme l'équation

$$9X^3 + 7Y^3 = 2Z^3,$$

qui admet les deux solutions $(1, -1, 1)$, $(1, 1, 2)$ et une troisième solution $(3, 1, 5)$ qu'on en déduit par les formules (51), on vérifie par la méthode précédemment employée qu'aucune des trois solutions ne peut être donnée par les formules (50) Or, comme ces formules sont les seules formules générales qui donnent une nouvelle solution de l'équation (89) quand on en connaît une autre, les trois solutions précédentes sont des solutions initiales.

24. *Résolution des équations numériques comprises dans l'équation générale*

$$X^4 + bY^4 = Z^2. \tag{90}$$

On a vu (14) que l'équation (90) peut être résolue lorsque b est de l'une des formes $x^2y(y+2x)$, $x(y^2-x)$, $-xy^2(x+y)$. En substituant dans les expressions précédentes pour x et y des nombres dont la valeur absolue est égale ou inférieure à 5, on reconnaît aisément que l'équation (90) peut être résolue pour les valeurs suivantes de b : $-2, 3, -5, -6, 8, -10, \pm 12, 14, 15, -17, 18, \pm 20, -21, -22$. Dans ces différents cas on trouve d'abord une première solution de l'équation (90) en se servant des identités qui correspondent aux diverses expressions de b, et l'on obtient ensuite d'autres solutions en appliquant les formules (64) et (67).

Dans les calculs que je viens d'indiquer, je n'ai pas rencontré d'équations à plusieurs solutions initiales, mais il n'est pas démontré qu'une pareille circonstance ne puisse pas se présenter.

25. *Résolution des équations numériques comprises dans l'équation générale*

$$X^4 + Y^4 = cZ^2. \tag{91}$$

Je donnerai ici un seul exemple. Faisons a et b égaux à 1 dans l'identité (62); alors l'expression de c devient $(9x^4 - y^4)^2 + 4x^4y^4$. Si l'on y fait d'abord x et y égaux à 1, on a c égal à 17×4, et l'on trouve ainsi que, pour $c = 17$, l'équation (91) a une première solution (1, 2, 1). Mais si ensuite on remplace, dans la même expression de c, x et y respectivement par 1 et 3, on a c égal à $2^2 \times 3^4 \times 17$, et l'on obtient encore, pour $c = 17$, la solution (13, 2, 41).

Maintenant on prouve par la méthode ordinaire que, quelle que soit la solution prise pour point de départ, les formules (67) ne donneront jamais les deux solutions précédentes. En effet, s'il en était autrement, on aurait à résoudre en nombres commensurables l'une ou l'autre des deux équations

$$\frac{x(3y^8+6x^4y^4-x^8)}{y(3x^8+6x^4y^4-y^8)}=\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad \frac{13}{2},$$

ce que l'on reconnaît impossible. Les deux solutions (1, 2, 1), (13, 2, 41) sont donc deux solutions initiales, si l'on admet qu'on n'ait pas d'autres formules générales que les formules (69) pour la résolution de l'équation (91) (*).

26. *Résolution des équations numériques comprises dans les équations générales*

$$aX^4+bY^4=cZ^3, \tag{92}$$

$$aX^4+bY^4=cZ^4. \tag{93}$$

Les identités (69) et (74) ne conduisent le plus souvent qu'à de grandes valeurs de c, même dans le cas où a et b sont égaux à ± 1 ; mais, si l'on suppose $a=1$, $b=-1$, en prenant les différences des quatrièmes puissances des plus petits nombres entiers, on pourra arriver à des valeurs simples de c. Ainsi les identités numériques

$$2^4-1=15, \quad 3^4-1=5\times 2^4=10\times 2^3$$

montrent que, a et b étant respectivement égaux à 1 et -1, les équations (92) et (93) pourront être résolues, la première, lorsque c sera égal à 15 ou 10, la seconde, lorsque c sera égal à 15 ou 5.

On peut encore trouver autrement des équations de la forme (92) ou (93) dont la résolution en nombres

---

(*) Il y en a d'autres, comme je le ferai voir dans un autre article; mais je n'ai pas voulu m'en servir ici, parce qu'elles n'ont pas été obtenues par la méthode des identités.

entiers soit possible. Soient Z, X_1, Y_1, U_1, V_1 des polynômes donnés, le premier par la formule (25) et les autres par les formules (29).

Faisons $u = 0$ dans tous ces polynômes, résolvons par rapport à r et z les équations $U_1 = 0$, $V_1 = 0$ et substituons dans X_1, Y_1, Z pour r et z leurs valeurs. Alors, si l'on remplace dans l'équation (28) U_1 et V_1 par zéro et X_1, Y_1, Z par leurs expressions, on tombe sur l'identité numérique

$$135 \times 3^4 - 4 \times 7^4 = 11^3,$$

c'est-à-dire que l'équation

$$135X^4 - 4Y^4 = Z^3$$

admet la solution (3, 7, 11).

On prouve d'une manière toute semblable que l'équation

$$X^4 - Y^4 = 84Z^4$$

admet la solution (31, 17, 10). On arrive d'ailleurs à cette dernière solution en faisant x et y respectivement égaux à 2 et 1 dans l'identité (73).

VII. — Résumé et conclusion.

27. Lorsque dans l'équation $aX^m + bY^m = cZ^n$ on suppose m supérieur à 2, on peut considérer quatre cas principaux suivant que m et n sont respectivement égaux à 3 et 2, tous deux égaux à 3, m et n respectivement égaux à 4 et 2, m égal ou supérieur à 4 et n supérieur à 2.

Dans le premier cas, l'équation, comme on l'a vu, a toujours une infinité de solutions.

Dans le deuxième et le troisième cas, l'équation peut être impossible ou bien avoir une infinité de solutions; encore ce dernier point n'a pas été jusqu'ici rigoureusement établi, car, pour qu'il en fût ainsi, il faudrait avoir démontré que, par l'emploi des formules qui permettent de déduire une solution d'une autre, on ne retombe jamais sur l'une des solutions précédentes.

Soit d'abord considérée l'équation $aX^3 + bY^3 = cZ^3$. Si l'on a trouvé plusieurs solutions initiales en faisant usage de certaines identités suivant la méthode que nous avons indiquée, on déduira de chacune des solutions obtenues une infinité d'autres solutions, à l'aide des formules (48) et (49) quand a et b seront égaux à 1, et en employant le système unique des formules (50) dans le cas général. D'ailleurs, toutes les fois que l'on aura obtenu deux solutions nouvelles, pourvu qu'elles ne soient pas deux solutions consécutives données par les formules (48) ou (50), on aura une solution nouvelle par l'emploi des formules (51). Mais, en procédant comme on vient de le dire, on ne pourra pas affirmer cependant que l'on a obtenu la solution complète, même en prenant une équation numérique particulière; car, pour être assuré qu'il en est ainsi, il faudrait avoir démontré que, dans l'exemple que l'on a choisi, le nombre des solutions initiales est fini et qu'on les a obtenues toutes.

Soit maintenant à résoudre l'équation

$$aX^4 + bY^4 = cZ^2.$$

Après avoir obtenu à l'aide d'identités une ou plusieurs solutions initiales, on en obtient une infinité d'autres, à l'aide des formules (64) et (67) lorsque, c étant égal à 1, l'un des nombres a ou b est aussi égal à 1, et en employant, dans le cas général, le système unique des formules (67).

Comme je l'ai déjà dit dans le n° 25, on peut, dans le cas général, trouver un deuxième système de formules de telle sorte que, dans ce cas comme dans le cas particulier, d'une solution connue on peut déduire deux solutions nouvelles. Ce n'est pas tout, dans les *Comptes rendus* du 7 avril 1879, j'ai donné le moyen d'avoir des formules qui permettent d'obtenir quatre solutions nouvelles quand on en connaît deux. Mais en employant la méthode, même ainsi complétée, on n'est pas sûr encore d'avoir toutes les solutions de l'équation, et cela pour les mêmes raisons que dans le cas de l'équation cubique.

Nous arrivons maintenant au quatrième cas. Alors le nombre des solutions peut être égal à 0, 1 ou 2; mais jusqu'à présent on ignore si, même dans les cas les plus simples, c'est-à-dire pour les équations (93) et (94), le nombre des solutions peut être égal ou supérieur à 3. J'ai donné, il est vrai, dans le cas de l'équation (76), la condition nécessaire et suffisante pour que cette équation puisse avoir trois solutions; mais je n'ai pu en faire l'application qu'à l'équation cubique.

28. Le travail que je termine ici ne sera pas inutile s'il montre bien, comme je l'espère, de quelle importance sont la recherche des identités et surtout la détermination des solutions initiales, dont on ne paraît pas s'être occupé jusqu'ici (*). On aura remarqué aussi toute la difficulté que présente la question de trouver la solution complète des équations dans le cas où elles ont une infinité de solutions. Il n'est donc pas étonnant que jusqu'ici aucun géomètre n'ait pu démontrer en toute rigueur que, dans le cas auquel nous venons de faire allusion, il avait la solution complète même d'une équation numérique particulière.

(*) D'après une Note de M. Lucas (*Nouvelles Annales*, novembre 1878) il faudrait faire exception pour M. Sylvester; mais jusqu'ici l'illustre géomètre n'a rien publié de ses recherches.