Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 466-477

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__466_2>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1270

(voir 2e série, t. XVII, p. 287),

PAR UN ANONYME.

On sait que les six normales menées par un point à une surface du second ordre sont sur un même cône du second degré. On propose de trouver le lieu que doit décrire le sommet S de ce cône pour que les différents cônes obtenus admettent les mêmes plans cycliques.

(GAMBEY.)

Soient S_0, S_1 les sommets de deux cônes du second

(*) Les nombres dont il s'agit sont 1, 8, 17, 18, 26, 27. Leur somme, augmentée de l'exposant 3, est égale à 100.

degré, ayant chacun six génératrices normales à l'ellipsoïde représenté par $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, et (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) les coordonnées des points S_0, S_1. Les équations de ces cônes seront, comme on sait,

$$(S_0)\ldots\frac{(b^2-c^2)x_0}{x-x_0}+\frac{(c^2-a^2)y_0}{y-y_0}+\frac{(a^2-b^2)z_0}{z-z_0}=0,$$

$$(S_1)\ldots\frac{(b^2-c^2)x_1}{x-x_1}+\frac{(c^2-a^2)y_1}{y-y_1}+\frac{(a^2-b^2)z_1}{z-z_1}=0.$$

Chacun d'eux a trois génératrices parallèles aux axes des coordonnées; si, de plus, ces deux cônes admettent les mêmes plans cycliques, toutes les génératrices de l'un d'eux seront respectivement parallèles aux génératrices de l'autre, car les directions des génératrices d'un cône du second degré sont déterminées par les directions de trois d'entre elles et par celle d'un plan cyclique.

Cela posé, soient

$$x-x_0=m(z-z_0)\quad\text{et}\quad y-y_0=n(z-z_0)$$

les équations d'une génératrice quelconque du cône (S_0); les coefficients m, n seront liés entre eux par l'équation

$$\frac{(b^2-c^2)x_0}{m}+\frac{(c^2-a^2)y_0}{n}+(a^2-b^2)z_0=0$$

ou

$$(1)\qquad\left(\frac{b^2-c^2}{m}\right)\frac{x_0}{z_0}+\left(\frac{c^2-a^2}{n}\right)\frac{z_0}{x_0}+a^2-b^2=0.$$

Une parallèle à cette génératrice du cône S_0, menée par le point S_1, sera une génératrice du cône S_1; on aura donc

$$(2)\qquad\left(\frac{b^2-c^2}{m}\right)\frac{x_1}{z_1}+\left(\frac{c^2-a^2}{n}\right)\frac{y_1}{z_1}+a^2-b^2=0.$$

Des équations (1) et (2) on peut conclure $\frac{x_1}{z_1}=\frac{x_0}{z_0}$,

$\frac{y_1}{z_1} = \frac{y_0}{z_0}$, car autrement ces équations détermineraient les valeurs des coefficients nécessairement variables m, n.

Les égalités $\frac{x_1}{z_1} = \frac{x_0}{z_0}$, $\frac{y_1}{z_1} = \frac{y_0}{z_0}$ montrent que les sommets S_0, S_1 sont sur une droite qui passe par l'origine des coordonnées; par conséquent, le lieu cherché est un diamètre de l'ellipsoïde.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Fauquembergue; G. Konigs, élève du Lycée Saint-Louis.

M. Konigs fait remarquer, comme l'auteur de la solution précédente, que tous les cônes du second degré qui ont même plan cyclique et trois génératrices de direction fixe sont homothétiques.

Question 1280

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 383);

Par M. S. REALIS.

L'équation $x^3 - (a^2 - b + c)x + ab = 0$, dans laquelle b est un entier plus grand que zéro, c un entier différent de zéro, et a un entier dont la valeur absolue est plus grande que celle de $\frac{c}{2}$, ne peut pas avoir deux racines entières.

Si l'équation a des racines imaginaires, la racine réelle est incommensurable.

Posons

$$f(x) = x^3 - (a^2 - b + c)x + ab.$$

On trouve

$$f(-a+1) = (a-1)(2a+c-1) + b,$$
$$f(-a) = ac,$$
$$f(-a-1) = -(a+1)(2a-c+1) - b.$$

Si les entiers a, b, c sont tels qu'il est dit dans l'énoncé de la question, savoir : a différent de zéro [et qu'on peut toujours supposer positif, puisque, au besoin, on le rend tel en changeant x en $-x$ dans l'équation $f(x) = 0$] ; b plus grand que zéro ; c différent de zéro, et plus petit que $2a$ en valeur absolue, $f(-a+1)$ et $f(-a-1)$ seront de signes différents, et aucune de ces quantités ne sera nulle. Entre les deux entiers $-a+1$ et $-a-1$ il y a donc une racine de l'équation $f(x) = 0$. Si cette racine était entière, elle ne pourrait être que $-a$; cela n'est pas, puisque la quantité $f(-a) = ac$ n'est pas nulle ; la racine n'est donc pas entière, et, comme elle ne saurait être fractionnaire, elle est incommensurable.

De là résulte la proposition énoncée, et l'on voit de plus que la relation posée entre les valeurs numériques de a et de c est une condition suffisante, mais pas nécessaire, pour établir l'existence de la racine incommensurable.

Soit fait, comme application,

$$a = 2A + 1, \quad b = A^2 + A + 1, \quad c = 3.$$

L'équation sera

$$x^3 - 3(A^2 + A + 1)x + 2A^3 + 3A^2 + 3A + 1 = 0,$$

et nous verrons tout de suite que, A étant entier, elle a une racine incommensurable (elle en a même trois, comme il est facile de le prouver). Cette équation rentre, en effet, dans une classe particulière d'équations irréductibles, traitées d'abord par M. Lobatto, et ensuite par M. Serret, et pour lesquelles on peut consulter le *Journal de M. Liouville* (t. IX et XV de la première série) ou bien l'*Algèbre supérieure* (2^e édition, p. 223 et 476).

Soit fait encore

$$a = -A, \quad b = A^2, \quad c = 4;$$

d'où

$$f(x) = x^3 - 4x - A^3.$$

L'équation $f(x) = 0$ a une seule racine positive, A étant positif. Cette équation peut s'écrire

$$(x-2)\,x(x+2) = A^3,$$

d'où, en prenant A entier et > 2, et vu que la valeur de x est incommensurable, on conclut que *le produit de trois nombres impairs consécutifs ne peut pas être un cube*. C'est un cas particulier d'une proposition beaucoup plus générale. On conclut de même que le produit de trois nombres pairs consécutifs n'est pas un cube, ce qui revient à dire que *le produit de trois entiers consécutifs n'est pas un cube* : cas particulier d'une proposition bien connue.

Question 1299

(voir 2^e série, t. XVII, p. 527);

PAR M. MORET-BLANC.

La somme des carrés des x premiers nombres entiers n'est jamais égale au double, au triple, au sextuple d'un carré. (ÉDOUARD LUCAS.)

La somme des carrés des x premiers nombres étant $\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$, il faut démontrer qu'on ne peut avoir, en nombres entiers, aucune des trois égalités

$$\text{(I)} \qquad x(x+1)(2x+1) = 12y^2 = 3z^2,$$
$$\text{(II)} \qquad x(x+1)(2x+1) = 18y^2 = 2z^2,$$
$$\text{(III)} \qquad x(x+1)(2x+1) = 36y^2 = z^2.$$

I. Supposons qu'on puisse avoir en nombres entiers

$$x(x+1)(2x+1) = 3z^2.$$

Les trois facteurs étant, deux à deux, premiers entre eux, doivent être deux carrés, et le triple d'un carré; mais, deux entiers consécutifs ne pouvant être simultanément des carrés, l'un des nombres x, $x+1$ devra être le triple d'un carré, et ce sera nécessairement x, car autrement x serait de la forme $3m-1$, qui ne peut appartenir à un carré. J'ajoute que x devra être le triple d'un carré pair, car, s'il était le triple d'un carré impair, il serait de la forme $8m+3$, et $2x+1$ serait de la forme $8m+7$, incompatible avec celle d'un carré.

Le seul cas où l'impossibilité ne soit pas démontrée est le suivant :

$$x = 12u^2, \quad x+1 = v^2, \quad 2x+1 = w^2.$$

On en tire

$$w^2 - 1 = 24u^2, \quad \text{d'où} \quad (w+1)(w-1) = 24u^2.$$

Le plus grand commun diviseur des facteurs $w+1$ et $w-1$ étant 2, on aura nécessairement à considérer l'un des systèmes suivants :

$$\text{(1)} \qquad w+1 = 2\alpha^2, \quad w-1 = 12\beta^2, \quad w^2+1 = 2v^2,$$
$$\text{(1')} \qquad w-1 = 2\alpha^2, \quad w+1 = 12\beta^2, \quad w^2+1 = 2v^2,$$
$$\text{(2)} \qquad w+1 = 4\alpha^2, \quad w-1 = 6\beta^2, \quad w^2+1 = 2v^2,$$
$$\text{(2')} \qquad w-1 = 4\alpha^2, \quad w+1 = 6\beta^2, \quad w^2+1 = 2v^2.$$

Le système (1)

$$w + 1 = 2\alpha^2, \quad w^2 + 1 = 2v^2$$

a été traité complétement par M. Gerono (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVI, p. 321); il n'admet que les solutions

$$w = 1, \quad \text{d'où} \quad x = 0,$$

$$w = -1, \quad \text{d'où} \quad w - 1 = -2 = 12\beta^2,$$

égalité impossible;

$$w = 7, \quad \text{d'où} \quad w - 1 = 6 = 12\beta^2,$$

égalité, de même, impossible en nombres entiers.

Ces trois solutions sont donc inadmissibles.

Le système (1′)

$$w - 1 = 2\alpha^2, \quad w^2 + 1 = 2v^2, \quad w + 1 = 12\beta^2$$

conduit aux mêmes calculs et ne donne que des impossibilités.

Considérons le système (2)

$$w + 1 = 4\alpha^2, \quad w^2 + 1 = 2v^2, \quad w - 1 = 6\beta^2.$$

On tire des deux premières équations

$$w = 4\alpha^2 - 1, \quad (4\alpha^2 - 1)^2 + 1 = 2v^2, \quad 4\alpha^4 + (2\alpha^2 - 1)^2 = v^2;$$

v impair,

$$(v + 2\alpha^2 - 1)(v - 2\alpha^2 + 1) = 4\alpha^4.$$

Les deux facteurs $(v + 2\alpha^2 - 1)$ et $(v - 2\alpha^2 + 1)$ sont des nombres pairs, ayant pour plus grand commun diviseur 2, car tout diviseur commun à ces deux nombres doit diviser leur somme $2v$, et, comme v est premier avec $2\alpha^2 - 1$, ce diviseur commun ne peut être autre que 2. On doit donc avoir

$$v + 2\alpha^2 - 1 = 2m^4, \quad v - 2\alpha^2 + 1 = 2n^4,$$

où m et n sont premiers entre eux.

Ces équations donnent

$$2\alpha^2 - 1 = m^4 - n^4, \quad m^4 n^4 = x^4, \quad m^2 n^2 = \alpha^2,$$

d'où

$$2m^2n^2 - 1 = m^4 - n^4, \quad n^4 + 2m^2n^2 - m^4 - 1 = 0,$$

$$n^2 = -m^4 \pm \sqrt{2m^4 + 1};$$

$2m^4 + 1$ devant être un carré, il faut que $m = 0$ (*). Il s'ensuit

$$n^2 = 1, \quad \alpha = 0, \quad v = 1, \quad x = 0,$$

solution inadmissible.

Le cas ($2'$) conduit aux mêmes calculs. L'équation entre m et n devient

$$m^4 - 2m^2n^2 - n^4 - 1 = 0, \quad m^2 = n^2 \pm \sqrt{2n^4 + 1}.$$

Le reste du calcul est le même.

Ainsi, l'égalité $x(x+1)(2x+1) = 3z^2$ est impossible en nombres entiers.

II. Considérons maintenant l'égalité

$$x(x+1)(2x+1) = 2z^2.$$

Il faut que parmi les trois facteurs du premier membre il y ait deux carrés et un double carré, qui ne peut être que x ou $x+1$.

Il y a donc à considérer les deux systèmes

$$x = 2u^2, \quad x + 1 = v^2, \quad 2x + 1 = w^2,$$
$$x = u^2, \quad x + 1 = 2v^2, \quad 2x + 1 = w^2.$$

(*) Legendre, *Théorie des nombres*, t. II, p. 6. Théorème III : *La formule $x^4 + 2y^4$ ne peut être égale à un carré, si ce n'est lorsque $y = 0$.*

On tire du premier $w^2 - 1 = 4u^2$, égalité impossible, à moins de supposer

$$w = 1, \quad u = 0, \quad \text{d'où} \quad x = 0,$$

valeur inadmissible.

On tire du second $w^2 + 1 = 4v^2$, égalité impossible, suivant le module 4.

III. L'égalité $x(x+1)(2x+1) = z^2$ exige que les trois facteurs soient des carrés, ce qui est évidemment impossible pour les deux premiers.

Question 1300

(voir 2ᵉ serie, t. XVII, p. 27),

PAR M. MORET-BLANC.

La somme des x premiers nombres triangulaires n'est jamais égale au double, au triple, au sextuple d'un carré. (ÉDOUARD LUCAS.)

Cette somme est égale à $\frac{x(x+1)(x+2)}{6}$. Il faut démontrer qu'on ne peut avoir en nombres entiers aucune des trois égalités

$$\text{(I)} \qquad x(x+1)(x+2) = 3z^2,$$

$$\text{(II)} \qquad x(x+1)(x+2) = 2z^2,$$

$$\text{(III)} \qquad x(x+1)(x+2) = z^2.$$

Les deux dernières exigent que la différence de deux carrés soit égale à une ou à deux unités, ce qui est impossible, à moins que l'un d'eux ne soit nul. Il en est de même de la première si x est impair.

Quand x est pair, l'égalité (I) devient, en posant $x = 2y$, et $z = 2u$,

$$y(y+1)(2y+1) = 3u^2,$$

équation dont l'impossibilité en nombres entiers a été démontrée dans la solution de la question 1299 (*voir* p. 473).

Question 1316

(voir 2e série, t. XVII, p. 336);

PAR M. LEZ.

On prend sur la tangente à une cycloïde fixe, à partir du point de contact, une longueur proportionnelle au rayon de courbure en ce point : trouver le lieu de l'extrémité de cette longueur quand la tangente se déplace. (BARBARIN.)

Dans une cycloïde, les coordonnées d'un point M étant

$$x = \mathrm{OP} = \mathrm{R}(\alpha - \sin\alpha) \ (^*),$$
$$y = \mathrm{MP} = \mathrm{R}(1 - \cos\alpha),$$

la tangente MN en ce point a pour coefficient angulaire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

La normale MI au même point est égale à

$$\mathrm{R}\sqrt{2(1-\cos\alpha)}.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure : OX, OY, axes de coordonnées rectangulaires; CM, rayon R d'une circonférence C tangente à OX au point I; α, l'angle MCI.

Si donc on prend sur la tangente une longueur MN proportionnelle à MI (ou bien au rayon de courbure qui est le double de la normale) et qu'on mène du point M une perpendiculaire MD à l'ordonnée de N, le triangle rectangle MND donnera

$$\mathrm{ND} = \mathrm{MN}\sin \mathrm{NMD} = m\mathrm{R}\sin\alpha,$$
$$\mathrm{MD} = \mathrm{MN}\cos \mathrm{NMD} = m\mathrm{R}(1-\cos\alpha);$$

par suite, les coordonnées d'un point N du lieu cherché seront

$$x = \mathrm{R}(\alpha - \sin\alpha + m - m\cos\alpha),$$
$$y = \mathrm{R}(1 - \cos\alpha + m\sin\alpha).$$

Le coefficient angulaire de la tangente en ce point étant

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\alpha + m\cos\alpha}{1-\cos\alpha + m\sin\alpha},$$

on trouve que l'équation de la normale est

$$y(\sin\alpha + m\cos\alpha) + x(1-\cos\alpha + m\sin\alpha) - \mathrm{R}(1-\cos\alpha + m\sin\alpha)(\alpha + m) = 0.$$

Elle rencontre l'axe OX en un point I′, dont l'abscisse $x = (\alpha + m)\mathrm{R}$.

Or, si l'on joint N au centre C′ d'un cercle de rayon R tangent à OX au point I′, on aura, dans le triangle rectangle NC′B (*),

$$\mathrm{NB} = \mathrm{R}(m\sin\alpha - \cos\alpha) \quad \text{et} \quad \mathrm{C'B} = \mathrm{R}(\sin\alpha + m\cos\alpha),$$

d'où

$$\mathrm{NC'} = \mathrm{R}\sqrt{1+m^2}.$$

De plus, $\mathrm{CC'} = \mathrm{II'} = m\mathrm{R}$, et l'on trouve facilement

(*) B est le point où l'ordonnée de N rencontre la droite CC′ parallèle à l'axe OX.

que l'angle $NC'I = NC'C + CC'I = \alpha = MCI$; l'angle $NC'I'$ est donc la somme de l'angle constant $IC'I'$ et de l'angle variable α.

Par suite, à chaque variation de α correspond une direction déterminée de $C'N$; en outre, la distance du point N au centre C' étant invariable, le point N décrit évidemment une cycloïde.