NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES DOSTOR

Méthode directe pour calculer la somme des puissances α des n premiers nombres entiers

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 459-464

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__459_1>

MÉTHODE DIRECTE POUR CALCULER LA SOMME DES PUISSANCES α DES n PREMIERS NOMBRES ENTIERS;

PAR M. GEORGES DOSTOR.

1. Pour évaluer la somme des puissances α des n premiers nombres entiers, nous ferons usage de la méthode suivante, qui ne suppose pas connues les puissances antérieures des mêmes nombres, et que l'on pourrait appeler la *méthode des coefficients indéterminés*.

Représentons, en général, par Σn^α la somme des puissances α des n premiers nombres entiers.

Dans la formule du P. Jean Prestet (1675), qui donne la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique, faisons $m = \alpha$ et $r = 1$; elle devient

$$(n+1)^{\alpha+1} = 1 + (\alpha+1)\Sigma n^\alpha + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\Sigma n^{\alpha-1}$$
$$+ \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{1.2.3}\Sigma n^{\alpha-2} + \ldots + n$$

ou

$$(n+1)[(n+1)^\alpha - 1] = (\alpha+1)\Sigma n^\alpha + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\Sigma n^{\alpha-1} + \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{1.2.3}\Sigma n^{\alpha-2} + \ldots.$$

Or le facteur $(n+1)^\alpha - 1$ du premier membre est évidemment divisible par n; par suite, il en est de même du second membre. Nous en concluons que le polynôme ordonné par rapport à n, qui exprime la somme des puissances semblables des n premiers nombres entiers, est divisible par n.

D'ailleurs la plus haute puissance de n, qui soit contenue dans le premier membre, est du degré $\alpha+1$. Donc:

L'expression de la somme des puissances α des n premiers nombres entiers est un polynôme entier par rapport à n, qui est du degré $\alpha+1$ et divisible par n.

2. *Méthode des coefficients indéterminés.* — Pour exposer cette méthode, qui est très rapide, proposons-nous de calculer la somme des *cinquièmes* puissances des n premiers nombres entiers. En désignant par $\varphi(n)$ le polynôme entier en n qui exprime cette somme, nous pourrons écrire (n° 1)

$$(1)\quad \Sigma n^5 = \varphi(n) = An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4 + En^5 + Fn^6,$$

où A, B, C, ..., F représentent des coefficients numériques qu'il s'agit de déterminer.

Afin d'obtenir les valeurs numériques de ces coefficients, dans (1) remplaçons n par $n-1$; nous aurons, en vertu de la formule de Taylor,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \Sigma(n-1)^5 = \varphi(n) - \varphi'(n) + \frac{1}{2}\varphi''(n) - \frac{1}{2.3}\varphi'''(n) + \frac{1}{2.3.4}\varphi^{\text{IV}}(n) \\ - \frac{1}{2\ldots5}\varphi^{\text{V}}(n) + \frac{1}{2\ldots6}\varphi(n)^{\text{VI}}. \end{aligned}\right.$$

Puisque

$$\Sigma n^5 - \Sigma(n-1)^5 = n^5,$$

il nous viendra, en retranchant (2) de (1), l'identité suivante :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} n^5 = {} & \varphi'(n) - \frac{1}{2}\varphi''(n) + \frac{1}{2\,3}\varphi'''(n) - \frac{1}{2.3.4}\varphi^{\text{IV}}(n) \\ & + \frac{1}{2\ldots5}\varphi^{\text{V}}(n) - \frac{1}{2\ldots6}\varphi^{\text{VI}}(n). \end{aligned}\right.$$

Il suffira maintenant de calculer les dérivées de $\varphi(n)$ au moyen de l'équation (1) et de substituer leurs expressions dans (3), pour avoir une équation identique qui fournira immédiatement six équations linéaires entre les six inconnues A, B, C, ..., F.

Prenons les dérivées successives de $\varphi(n)$. L'égalité (1) nous donne

$$\begin{array}{rrcrrrrrr}
 & \varphi'(n) & = & A & +2Bn & +3Cn^2 & +4Dn^3 & +5En^4 & +6Fn^5, \\
- & \frac{1}{2}\varphi''(n) & = & & -B & -3Cn & -6Dn^2 & -10En^3 & -15Fn^4, \\
+ & \frac{1}{2.3}\varphi'''(n) & = & & & +C & +4Dn & +10En^2 & +20Fn^3, \\
- & \frac{1}{2.3.4}\varphi^{\text{IV}}(n) & = & & & & -D & -5En & -15Fn^2, \\
+ & \frac{1}{2\ldots5}\varphi^{\text{V}}(n) & = & & & & & +E & +6Fn, \\
- & \frac{1}{2\ldots6}\varphi^{\text{VI}}(n) & = & & & & & & -F.
\end{array}$$

Si nous mettons ces expressions dans l'identité (3), et que nous égalions à zéro les coefficients des puissances successives de n, nous obtiendrons les six équations du premier degré

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{rrrrrrl}
A - & B + & C - & D + & E - & F & = 0, \\
 & + 2B - & 3C + & 4D - & 5E + & 6F & = 0, \\
 & & + 3C - & 6D + & 10E - & 15F & = 0, \\
 & & & + 4D - & 10E + & 20F & = 0, \\
 & & & & + 5E - & 15F & = 0, \\
 & & & & & + 6F & = 1.
\end{array}\right.$$

Résolvons ces équations de proche en proche à partir de la dernière; nous obtenons les valeurs cherchées

$$F = \frac{1}{6}\quad E = \frac{1}{2}, \qquad D = \frac{5}{12},$$

$$C = 0, \quad B = -\frac{1}{12}, \quad A = 0.$$

En mettant ces valeurs dans le développement (1), nous trouvons que la somme des cinquièmes puissances des n premiers nombres entiers est

$$\Sigma n^5 = -\frac{n^2}{12} + \frac{5n^4}{12} + \frac{n^5}{2} + \frac{n^6}{6}$$

ou

$$\Sigma n^5 = \frac{1}{12} n^2 (2n^4 + 6n^3 + 5n^2 - 1).$$

Le polynôme entre parenthèses et sa dérivée

$$8n^3 + 18n^2 + 10n$$

s'annulent pour $n = -1$; par conséquent ce polynôme est divisible par $(n+1)^2$ et fournit le quotient

$$2n^2 + 2n - 1.$$

Nous trouvons ainsi la formule bien simple

$$\Sigma n^5 = \frac{1}{12} n^2 (n+1)^2 (2n^2 + 2n - 1).$$

3. *Formation des équations linéaires aux coefficients indéterminés.* — Les équations (4) peuvent s'écrire immédiatement.

En effet, il est aisé de remarquer que, dans la disposition adoptée, les coefficients de la $p^{\text{ième}}$ des lettres A, B, C, ..., ou de la $p^{\text{ième}}$ colonne verticale sont les coefficients numériques du binôme développé

$$-(-a+b)^p,$$

moins le dernier de ces coefficients.

De plus les seconds membres des α premières équations sont tous égaux à zéro, et celui de la dernière est toujours égal à 1.

Le Tableau de nos équations se forme d'une manière aisée et s'obtient presque instantanément au moyen du triangle arithmétique de Pascal.

Appliquons cette règle à la recherche de la somme des cubes des n premiers nombres entiers. Les équations aux coefficients seront

$$\begin{array}{rrrrl} A & -\ B & +\ C & -\ D & = 0, \\ & +2B & -3C & +4D & = 0, \\ & & +3C & -6D & = 0, \\ & & & +4D & = 1 \end{array}$$

et nous fourniront de suite les valeurs

$$D = \frac{1}{4}, \quad C = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad A = 0.$$

Nous trouvons ainsi que

$$\Sigma n^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4} = \frac{1}{4} n^2 (n^2 + 2n + 1)$$

ou

$$\Sigma n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}.$$

Nous donnerons dans un prochain article les expressions réduites, qui représentent les sommes des *dix* premières puissances des n premiers nombres entiers, ainsi que les relations remarquables qui existent entre ces sommes. (*A suivre.*)