Nouvelles annales de mathématiques

JUNG

# Recherches sur les systèmes polaires

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 18 (1879), p. 444-459

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__444_1>

# RECHERCHES SUR LES SYSTÈMES POLAIRES (*);

PAR M. JUNG,

Professeur de Statique graphique à l'Institut technique supérieur de Milan.

TRADUCTION PAR UN ABONNÉ.

Dans la théorie des moments d'inertie de plusieurs forces parallèles, dirigées ou non dans le même sens, on rencontre un certain système polaire dont on peut tirer un grand parti pour le développement géo-mécanique de la même théorie, en en déduisant, par un procédé naturel et uniforme, les principales propriétés des coniques de moments nuls et de moments constants, des coniques d'inertie et de la conique centrale, etc., ainsi

(*) Note lue devant l'Institut royal lombard, dans sa séance du 20 février 1879.

que des quadriques analogues quand les forces données ne sont pas toutes contenues dans un même plan.

La considération de ce fait et l'étude de quelques conceptions neuves, développées par l'illustre professeur Cremona dans ses Leçons de Statique graphique, jointes au désir de coopérer, dans la mesure de mes forces, au but élevé que se propose d'atteindre, dans son magnifique Ouvrage *Die graphische Statik* (*), le célèbre professeur Culmann, ont fait naître en moi la pensée de reprendre l'étude des systèmes polaires en général, au point de vue géométrique. Mon but spécial est de séparer et de grouper ensemble toutes les propriétés qui, établies par la méthode synthétique, restent vraies indépendamment de toute considération mécanique, et qui, pour ce motif, pourront s'appliquer avec avantage, non-seulement à la théorie des moments d'inertie, mais aussi à d'autres questions variées et de nature différente.

Ce sont quelques-uns des résultats de ces recherches que j'ai l'honneur de présenter en quelques mots à l'Institut royal; je réserve pour un autre travail un développement plus étendu de la théorie des systèmes polaires et de ses applications. A part les choses énoncées dans les préliminaires et quelques autres indiquées dans le paragraphe suivant, qui sont déjà connues, mais qui sont nécessaires pour l'intelligence du reste, je ne crois pas que l'on soit déjà parvenu par la voie synthétique ou même par la voie analytique aux résultats géométriques que je vais énoncer. C'est pour ce motif que, malgré leur nature élémentaire, ils m'ont paru assez intéressants en eux-mêmes et utiles par leurs conséquences et leurs applications pour que je puisse en faire l'objet de cette

(*) Voir l'intéressante Préface de la seconde édition (Zürich, 1875), notamment aux pages v et vii.

Communication, qui sera, je l'espère, suivie par d'autres sur le même sujet.

## I. — Préliminaires.

1. Si deux plans réciproques $\pi$, $\pi'$ sont superposés de manière qu'aux sommets d'un triangle ABC, considérés comme points de l'un d'eux, correspondent les côtés opposés considérés comme droites de l'autre, *les deux plans sont en position involutive et constituent un système polaire* $\Sigma$ (*) : un point quelconque P de $\Sigma$ correspond *doublement* à une droite déterminée $p$ du même système $\Sigma$ (ce qui veut dire que P, considéré comme appartenant à $\pi$ ou à $\pi'$, a toujours pour correspondants, dans $\pi'$ ou dans $\pi$, la droite $p$); la considération des deux systèmes $\pi$ et $\pi'$ devient superflue, et les éléments correspondants dans $\Sigma$, comme P et $p$, sont ordinairement nommés (**) *pôle* et *polaire* (nous les désignerons sous les noms de *antipôle* et *antipolaire*). Tout cela est très-connu.

2. On sait aussi que, si un point est situé sur sa propre antipolaire, et, par suite, si une droite renferme son propre antipôle (nous appellerons ces éléments *point uni* et *droite unie*), le système polaire est doué d'une *conique directrice* D (***) qui est, en même temps, le lieu des points unis et l'enveloppe des droites unies, et qui se

---

(*) Chasles, *Aperçu historique*, etc., p. 370. 2e édition (Paris, 1875).

(**) Voir, par exemple : Staudt, *Geometrie der Lage* (Nurnberg, 1847), § 18, nos 234, 235; Reye, *Die Geometrie der Lage* (Hannover, 1868, t. II, p. 59).

(***) *Ordnungscurve* suivant Staudt; *Directrix* suivant Reye; *Kern-Kegelschnitte* suivant Schröter (*Die Theorie der Kegelschnitte*. Leipzig. 1867).

correspond à elle-même, c'est-à-dire qui se confond avec sa propre antipolaire.

3. Quand la directrice D existe, le système polaire (complexe des points de Σ et des droites antipolaires correspondantes) n'est pas autre chose que le système polaire réciproque ordinaire de Poncelet, relatif à la conique fondamentale D (*).

4. Par analogie, on maintient dans le cas général les dénominations et les définitions de droites réciproques, de points réciproques, de triangle conjugué, etc., qui sont très-connues dans la théorie du système spécial formé par les pôles et les polaires, par rapport à une conique fondamentale. Les théorèmes relatifs : 1° *à la projectivité entre une ponctuelle d'antipôles et le faisceau correspondant des antipolaires;* 2° *à l'involution des points réciproques situés sur une même droite,* continuent à être vrais pour un système polaire Σ quelconque. Il en est de même de ceux qui s'en déduisent et qui se rapportent aux courbes correspondantes dans Σ (courbes antipolaires) et, en particulier, aux coniques antipolaires, à leurs centres, etc. (**).

5. Le *centre* d'un système Σ est l'antipôle O de la droite $j$ à l'infini; les droites passant par O sont des diamètres. Deux diamètres qui sont des droites réciproques (c'est-à-dire, telles que le point à l'infini de l'un soit l'antipôle de l'autre) sont nommés *conjugués.*

*Les diamètres conjugués de* Σ *forment des couples en*

---

(*) Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, t. II, p. 57 et suiv. 2e édition (Paris, 1866); Chasles, *loc. cit.*, p. 228 et suiv.

(**) Voir, par exemple : Cremona, *Éléments de Géométrie projective*, § 20 et 22 (Turin, 1873; Paris, 1875).

*involution*; les rayons doubles de cette involution, s'ils existent, sont appelés *asymptotes*, les rayons conjugués et orthogonaux sont les *axes* du système polaire (*).

6. Un système polaire est déterminé quand on en donne un triangle conjugué ABC, et comme antipolaire d'un point P, non situé sur le périmètre du triangle, une droite $p$ qui ne passe par aucun de ses sommets. Suivant la position relative de P et de $p$, par rapport au triangle ABC, le système admet ou n'admet pas de conique directrice (**). Quand la directrice existe, deux des trois côtés de tout triangle conjugué la rencontrent et le troisième ne la rencontre pas.

## II. — Classification des systèmes polaires. Propriétés focales.

7. Si O est à distance finie, les diamètres conjugués forment une involution proprement dite et le système $\Sigma$ a *deux asymptotes* ou *n'en a pas*. Dans le premier cas, le système polaire peut être nommé *hyperbolique*, et dans le second cas *elliptique*. Si O est à l'infini, tous les diamètres sont parallèles entre eux, et il n'y a qu'une seule asymptote (la droite $j$ à l'infini). Ce système peut être nommé *parabolique* [***].

8. *Le système hyperbolique a deux axes*, qui sont les

---

(*) Voir Schröter, *loc. cit.*, § 58.

(**) Staudt, *Geometrie der Lage*, n° 237; Reye, *loc. cit.*, p. 61.

(***) La classification des systèmes polaires que je propose est différente de celle de Schröter (*loc. cit.*, § 56). J'ai quelques raisons pour la justifier; mais, pour éviter ici une trop longue digression, je me réserve de les exposer dans une autre occasion; je reviendrai sur cet argument et je chercherai à mettre en lumière soit le vrai fondement des deux classifications, soit la nécessité de les accorder pour pouvoir les maintenir toutes les deux.

bissectrices des angles des asymptotes. Si les asymptotes sont rectangulaires, le système hyperbolique est dit *orthogonal.*

*Dans le système elliptique il n'y a que deux axes* (système elliptique proprement dit), *ou il y a une infinité d'axes* (système elliptique orthogonal), suivant que, dans l'involution des diamètres conjugués, un seul rayon est perpendiculaire à son conjugué, ou tous les rayons sont perpendiculaires à leurs conjugués. *Dans le système parabolique,* un des axes étant à l'infini, *il n'y a,* à proprement parler, *qu'un seul axe.*

9. Si l'involution des droites réciproques qui passent par un point se compose d'angles droits, ce point est nommé *antifoyer* (ou foyer) du système polaire (*).

1° *Dans tout système polaire il y a deux antifoyers. Si le système est hyperbolique ou elliptique proprement dit, ces antifoyers se trouvent sur un axe (axe antifocal), à égale distance du centre* O; *si le système est elliptique orthogonal, ils se confondent avec le centre* O; *si le système est parabolique, un des antifoyer tombe en* O *ou est à l'infini dans la direction de l'axe du système.*

2° *Les droites réciproques et orthogonales déterminent une involution sur chacun des axes du système. Deux points* M, M′ *conjugués de cette involution sont tels que deux droites passant, l'une par* M, *l'autre par* M′, *sont orthogonales si elles sont réciproques, et inversement.*

*L'involution sur l'axe antifocal a deux points doubles : ce sont les antifoyers; l'involution sur l'autre axe*

(*) Voir SCHRÖTER, *loc. cit.*, § 59, et pour les choses analogues dans les coniques: REYE, *Die Geometrie der Lage.* 2ᵉ édit., t. I, XIII. p. 127-136.

(*dans les systèmes polaires hyperbolique et elliptique, bien entendu*) *n'a pas d'éléments doubles, et ses segments sont vus sous des angles droits de chacun des antifoyers.*

*Deux droites réciproques et orthogonales sont séparées harmoniquement par les antifoyers.*

**10.** Deux droites réciproques et orthogonales qui passent par un point seront nommées *axes principaux* du point (*). Les axes du système (n° 5) ne sont donc autre chose que les axes principaux du centre O.

1° *Si $\varphi$ est un antifoyer, toutes les droites qui passent par $\varphi$ sont ses axes principaux; tout point autre que les antifoyers n'a que deux axes principaux.*

2° *Les axes principaux d'un point sont les bissectrices des angles formés par les deux rayons menés de ce point aux antifoyers* (n° 9).

## III. — Éléments symétriques.

**11.** Deux points du plan $\Sigma$ situés sur un diamètre à égale distance de O seront nommés *points symétriques*.

Deux droites du plan $\Sigma$ parallèles et équidistantes de O seront nommées *droites symétriques*.

**12.** Parmi les différentes propriétés des éléments symétriques nous signalerons les suivantes :

1° *Sur une droite a réciproque à sa symétrique b, il n'existe qu'un seul point réciproque à son sy-*

*Par un point A réciproque à son symétrique* B, *il ne passe qu'une seule droite réciproque à sa sy-*

(*) Schröter (*loc. cit.*, § 60) démontre quelques propriétés très-élégantes de ces couples de droites.

*métrique : c'est l'antipôle de $b$.*

2° *Si $m$ est une droite non réciproque à sa symétrique $m_0$, les couples, en nombre infini, des points $A$, $A'$ situés sur $m$, et tels que l'un d'eux $A'$ est réciproque et l'autre $A$ symétrique d'un même point $A_0$ de $m_0$, forment une involution; les points doubles, quand ils existent, sont des points réciproques et symétriques.*

3° *Si $A_0$, $A'$ sont des points réciproques situés sur un diamètre (les asymptotes exceptées) et si $A$ est symétrique de $A_0$, quand ce dernier point parcourt le diamètre $OA_0$, les couples des points $A_0A'$ et $AA'$ forment respectivement deux involutions superposées, ayant le même centre $O$.*

4° *Sur une droite $m$ non réciproque à sa symétrique, il y a deux points réciproques à leurs propres symétriques, ou il n'y en a aucun.*

*métrique : c'est l'antipolaire de $B$.*

*Si $M$ est un point non réciproque à son symétrique $M_0$, les couples, en nombre infini, des droites $a$, $a'$ concourant en $M_0$, telles que l'une d'elles $a'$ soit réciproque et l'autre $a$ symétrique d'un même rayon $a_0$ du faisceau $M_0$, forment une involution; les éléments doubles, quand ils existent, sont des droites réciproques et symétriques.*

*Si $a_0$, $a'$ sont des droites réciproques et parallèles (les directions asymptotiques exceptées), et si $a$ est symétrique à $a_0$, quand cette dernière droite se meut parallèlement à elle-même, les couples des droites $a_0a'$ et $aa'$ forment respectivement deux involutions superposées, ayant le même rayon central passant par $O$.*

*Par un point $M$ non réciproque à son symétrique, il passe deux droites réciproques à leurs propres symétriques, ou il n'en passe aucune.*

## IV. — Conique centrale. Ses rapports avec la directrice.

13. En s'appuyant sur ces propriétés et par de simples considérations de Géométrie projective peu différentes de celles qui ont été employées par le professeur Reye (*Geometrie der Lage,* t. II, p. 60) pour établir l'existence de la directrice, on trouve que :

Théorème. — *Si, dans un système polaire, il existe un élément réciproque à son propre symétrique, il y en a une infinité : dans ce cas il existe une conique effective* [*] C, *qui est, en même temps, le lieu des points réciproques et symétriques et l'enveloppe des droites réciproques et symétriques, et qui a pour diamètres conjugués les diamètres conjugués du système.*

Quand cette conique C existe, nous la nommerons *conique centrale du système polaire.* Elle a en commun avec la conique directrice, outre le centre et les diamètres conjugués, la propriété de se correspondre à elle-même, de coïncider avec sa propre conique antipolaire (n° 2).

14. *L'antipôle d'une droite est le pôle, par rapport à la conique centrale, de la droite symétrique.*

*L'antipolaire d'un point est la polaire, par rapport à la conique centrale, du point symétrique.*

Un système polaire Σ est dit *système polaire réciproque* (Poncelet) par rapport à la conique fondamentale D quand la directrice D existe. Quand la conique centrale existe et qu'on y rapporte le système polaire,

(*) C'est-à-dire qui ne peut se réduire à deux droites (ou points) ni à une droite (ou point) double.

ce système peut, raisonnablement, être nommé *système polaire symétrique* (par rapport à la conique centrale C). La liaison qui existe entre l'antipôle et l'antipolaire est ainsi nettement définie, soit au moyen de la conique directrice, soit au moyen de la conique centrale.

15. On peut remarquer ce qui suit sur les conditions d'existence et de coexistence des coniques D et C.

THÉORÈME. — *Dans tout système polaire* $\Sigma$ *il existe toujours au moins une des coniques* D (*directrice*), *ou* C (*centrale*).

*Si le système polaire est hyperbolique* (nº 7), *les deux coniques coexistent. La directrice et la centrale sont des hyperboles conjuguées* (*supplémentaires*) *dont les asymptotes communes sont celles du système polaire. La directrice se trouve dans celui des deux angles asymptotiques où deux points réciproques de* $\Sigma$, *en ligne droite avec le centre du système, se trouvent du même côté de ce centre.*

*Si le système polaire est elliptique* (nºs 7 et 8), *une seule des deux coniques existe réellement et est une ellipse* [*] *dont les diamètres conjugués coïncident avec ceux du système. Cette ellipse est la directrice* D *ou la centrale* C, *suivant que deux points réciproques de* $\Sigma$, *en ligne droite avec le centre du système, sont du même côté ou de part et d'autre du centre.*

*Si le système polaire est parabolique* (**) (nº 7), *les deux coniques coexistent, mais sont identiques. La di-*

(*) Dans le système elliptique orthogonal cette ellipse est un cercle.

(**) Il n'est peut-être pas inutile de remarquer que dans ce système, le centre étant à l'infini, un point A peut être regardé comme son propre symétrique ou comme le symétrique d'un autre point quelconque du diamètre passant en A, et une droite *a* peut être regardée comme symétrique à elle-même ou à une autre droite quelconque parallèle à *a*; d'après *rectrice et la centrale se confondent en une même parabole, ayant pour diamètres ceux du système, et pour laquelle les directions conjuguées aux diamètres coïncident avec les directions conjuguées aux mêmes diamètres dans le système polaire.*

16. La théorie des coniques conjuguées harmoniques (SCHRÖTER, *loc. cit.*, §§ 27, 54) conduit à quelques autres propriétés de la directrice et de la centrale. Par exemple : *Dans le système hyperbolique, les hyperboles* D *et* C *forment, avec chacune des ellipses ayant pour diamètres conjugués deux de leurs diamètres conjugués, un terne de coniques harmoniques. Chacune de ces ellipses coïncide (comme la directrice et la centrale,* n^os 2 et 13) *avec sa propre antipolaire.*

*Dans le système elliptique, chaque couple d'hyperboles supplémentaires ayant pour diamètres conjugués les deux mêmes diamètres conjugués de* D *(ou de* C, *quand* D *n'existe pas) forme avec l'ellipse* D *(ou* C) *un terne de coniques harmoniques. Toutes ces hyperboles sont leurs propres antipolaires.*

*Dans le système parabolique,* soient AB une corde quelconque de la conique directrice; M le point de cette conique dont la tangente est parallèle à AB; ABCD le parallélogramme ayant cette corde pour côté et le point M pour centre; E et F les points milieux de AB, CD (EF sera parallèle à BC et passera par M ou coïncidera avec le diamètre conjugué à la direction AB). Ceci posé, *la parabole directrice, — la parabole* (bitangente à la directrice) *passant par* M, C, D *et tangente en ces points*

cela, la conique centrale n'a, à la rigueur, aucune signification dans le système parabolique, et cette proposition doit être considérée comme une définition plutôt que comme un théorème.

*aux droites t*, EC, ED, — *l'hyperbole passant par* A, B, C, D et tangente en ces points aux droites FA, FB, EC, ED sont trois coniques harmoniques; chacune d'elles se confond avec son antipolaire, quelle que soit la corde AB (*).

17. La conique centrale d'un système polaire $\Sigma$ peut se concevoir autrement, et se présenter sous d'autres aspects.

1° Nommons $\pi$ le complexe des éléments M (points ou droites) situés dans le plan $\Sigma$; $\pi_1$ celui des éléments $M_1$ (points ou droites) symétriques aux M; $\pi_2$ celui des éléments $m_2$ (droites ou points) correspondant dans $\Sigma$ aux M. Les figures (ou systèmes plans) $\pi_1$ et $\pi_2$ sont évidemment, l'une la *transformée homologique harmonique* (**) de la figure $\pi$ (O et $j_\infty$ étant le centre et l'axe d'homologie), l'autre *la transformée antipolaire* (n° 4) de la même figure $\pi$; en d'autres termes, le système plan $\pi$ est homographique (collinéaire) de $\pi_1$, réciproque de $\pi_2$ et se trouve en involution avec ces deux systèmes; par suite, à toute courbe de $\pi$ correspondent (doublement) deux courbes, distinctes en général, l'une dans $\pi_1$, l'autre dans $\pi_2$ : *la conique centrale de $\Sigma$ est la courbe de $\pi$ avec laquelle viennent se confondre les deux courbes correspondantes de $\pi_1$ ou de $\pi_2$.*

2° Si nous rapportons l'un à l'autre les deux plans superposés $\pi_1$ et $\pi_2$, en prenant comme correspondants deux éléments $M_1$ et $m_2$ qui correspondent à un même élément M de $\pi$ (et qui, par suite, seront de nature différente : $m_2$ sera une droite ou un point suivant que $M_1$

---

(*) Les coniques dont il est ici question ne sont pas les seules du plan $\Sigma$ qui coïncident avec leurs antipolaires.

(**) Voir Staudt, *Geometrie der Lage*, nos 227, 340.

est un point ou une droite), il est facile de démontrer qu'*ils forment un nouveau système polaire* $\Sigma'$ *ayant le même centre et les mêmes diamètres conjugués que le premier* $\Sigma$; et ensuite que : *La conique centrale de* $\Sigma$ *est la directrice de* $\Sigma'$.

## V. — Éléments qui déterminent un système polaire.

18. On démontre assez facilement les propositions suivantes (et leurs corrélatives, dont j'omets l'énoncé pour abréger), qui se rapportent aux éléments dont on peut disposer arbitrairement pour déterminer un système polaire (voir aussi n° 6).

A. Si dans un système polaire on donne un triangle conjugué et les involutions des droites réciproques issues de deux de ses sommets, le système est déterminé.

B. Un triangle conjugué ABC étant donné dans un système polaire $\Sigma$, si l'on prend une droite $p$ passant par un sommet A comme antipolaire d'un point P du côté opposé, le système $\Sigma$ est déterminé si l'on donne en outre :

1° L'involution des droites réciproques issues d'un des autres sommets;

2° Ou bien l'involution des droites réciproques passant par P (P n'étant pas sur $p$);

3° Ou bien un point R de $p$ comme antipôle d'une droite $r$ passant par P (P étant supposé sur $p$).

C. Étant donnés un point P et une droite $p$ comme correspondants dans un système polaire $\Sigma$, on peut, pour déterminer le système, prendre encore arbitrairement un point Q et une droite $q$ pour correspondants, pourvu que (*) :

1° Si P est en dehors de $p$, on donne l'involution des

(*) La substance de ce théorème, sinon la forme, est due à Staudt, *Geometrie der Lage*, n° 240.

droites réciproques issues de P et qu'en outre les points Q et $(p; q)$ soient projetés du point P par deux rayons conjugués de cette involution;

2° Si P est sur $p$, la droite $q$ rencontre $p$ sur l'antipôle de PQ, et qu'en outre un point R de $p$ et une droite $r$ passant par P soient donnés comme correspondants.

D. Si l'on prend comme correspondants dans un système polaire $\Sigma$ les sommets et les côtés respectivement opposés d'un pentagone plan, le système est déterminé (*).

E. Si l'on prend deux triangles homologiques ABC, $A'B'C'$ comme correspondants dans un système polaire $\Sigma$ (A étant l'antipôle de $B'C'$, etc.), le système est déterminé (**).

F. La conique directrice ou la conique centrale d'un système polaire étant donnée, ce système est déterminé.

19. Il faut remarquer les cas particuliers suivants :

G. Étant donnés dans un système polaire $\Sigma$ les axes, un point propre P et son antipolaire $p$, le système est déterminé si les axes ne passent pas par P et ne sont pas parallèles à $p$, et si, en outre, $p$ ne passe pas par le centre.

H. Étant donnés le centre O d'un système polaire, l'involution des droites réciproques issues d'un point S et l'antipolaire $s$ de ce point, le système $\Sigma$ est déterminé pourvu que SO et $S.js$ soient des rayons conjugués de cette involution (***).

K. Étant données les asymptotes d'un système anti-

---

(*) STAUDT, *loc. cit.*, n° 238.
(**) STAUDT, *loc. cit.*, n° 241.
(***) $j$ représente la droite à l'infini du plan.

polaire hyperbolique, le système est déterminé pourvu que l'on prenne encore comme correspondants un point S et une droite $s$, de manière que les points S et $(js)$ soient séparés harmoniquement par les asymptotes.

## VI. — Quadrangles et quadrilatères conjugués.

20. On trouve le théorème suivant et son corrélatif dans la *Geometrie der Lage* de Staudt. Si, dans un quadrangle complet situé dans le plan d'un système polaire $\Sigma$, deux côtés sont respectivement réciproques à leurs côtés opposés, les deux côtés opposés restants sont aussi réciproques.

Ces théorèmes sont démontrés dans l'hypothèse de la polarité réciproque ordinaire par rapport à une conique donnée K, et M. le professeur Reye donne le nom de *Polviereck* de la conique K à un quadrangle complet tel que les trois couples de côtés opposés sont des droites réciproques par rapport à K, et celui de *Polvierseit* à la figure corrélative. Par analogie avec une autre dénomination généralement reçue, nous nommerons :

*Quadrangle conjugué* un quadrangle complet situé dans le plan d'un système polaire $\Sigma$, tel que ses couples de côtés opposés soient, deux à deux, des droites réciproques de $\Sigma$.

*Quadrilatère conjugué* un quadrilatère complet situé dans le plan d'un système polaire $\Sigma$, tel que ses couples de sommets opposés soient, deux à deux, des points réciproques de $\Sigma$.

Ces définitions données, il suffira de remarquer que *les propriétés relatives aux quadrangles et aux quadrilatères conjugués,* trouvées par M. Reye, pour le cas où il existe une conique fondamentale, et exposées dans un

Chapitre de sa *Geometrie der Lage* (seconde édition, t. I, p. 19 et suiv.), *restent vraies, sauf de légères modifications, pour les systèmes polaires en général.* Il est inutile d'en donner ici les énoncés.

*Observation.* — Des raisonnements semblables à ceux qui conduisent aux résultats ci-dessus mènent, pour les systèmes polaires dans l'espace, à la conception d'une *quadrique centrale* et permettent d'établir les conditions de son existence, ses rapports avec la *quadrique directrice* et ses principales propriétés.