ROBAGLIA

Concours d'admission à l'École centrale. 1re session. 2 et 3 août 1878

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 363-365
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__363_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE

1^{re} SESSION. — 2 ET 3 AOUT 1878.

(voir 2^e série, t XVIII, p. 91).

SOLUTION DE M. ROBAGLIA,

A Philippeville.

On donne dans un plan une droite LL', *un point* F *et un point* A; *on considère toutes les coniques pour lesquelles le point* F *est un foyer et la droite* LL' *la directrice correspondante. Par le point* A *on mène des tangentes à toutes ces coniques, et l'on demande :*

1° *Le lieu de la projection de* A *sur toutes les cordes de contact;*

2° *Le lieu des points de contact. Ce dernier lieu est une conique: reconnaître quel est son genre d'après la position du point* A, *et, pour une position donnée de ce point, chercher à obtenir, par des constructions simples, un nombre de points et de tangentes suffisant pour déterminer la conique.*

1° On sait que la polaire du point A par rapport à l'une quelconque des coniques considérées coupe la directrice LL′ au même point B que la perpendiculaire FB à la droite FA. Donc, le lieu de la projection du point A sur toutes les polaires est la circonférence décrite sur AB, comme diamètre.

2° Prenons pour origine de coordonnées rectangulaires le pied O de la perpendiculaire FO à la directrice LL′, et pour axe des x cette perpendiculaire, dans le sens où l'abscisse du point F est positive.

Soient a cette abscisse, et α, β les coordonnées du point A. L'équation générale des coniques considérées est

$$(x-a)^2+y^2-kx^2=0$$

ou

$$(1-k)x^2+y^2-2ax+a^2=0,$$

et celle des polaires du point A par rapport à ces coniques :

$$\beta y+[(1-k)\alpha-a]x+a(a-\alpha)=0.$$

On aura l'équation du lieu des points d'intersection de ces coniques et des polaires correspondantes en éliminant le paramètre variable k entre ces deux dernières équations, ce qui donne

$$(1)\qquad ax^2-\beta xy+\alpha y^2-a(a+\alpha)x+\alpha a^2=0;$$

le lieu est, par conséquent, une conique.

Le binôme caractéristique $\beta^2-4a\alpha$ de l'équation (1) montre que la conique représentée par cette équation est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que le point donné A est intérieur ou extérieur à la parabole $y^2 = 4ax$, ou situé sur cette parabole dont le foyer est F.

La conique représentée par l'équation (1) passe aux points A, F, où elle est tangente aux droites BA, BF, car les coefficients angulaires

$$\frac{a(a-\alpha)+\beta^2}{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad \frac{a-\alpha}{\beta}$$

de ses tangentes en ces points sont aussi ceux des droites BA, BF; en outre, elle coupe l'axe des x en un autre point dont l'abscisse est α. Connaissant ainsi un point, deux tangentes et leurs points de contact, il est facile de construire la courbe.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; Lez; A. Leinchugel; G. Lambiotte, élève à l'École Polytechnique de Bruxelles H. Rigolot.