NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. TISSOT

Mémoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 337-356

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__337_0>

MÉMOIRE

SUR LA REPRÉSENTATION DES SURFACES ET LES PROJECTIONS DES CARTES GÉOGRAPHIQUES;

PAR M. A. TISSOT.

[SUITE (*)]

CHAPITRE II.

Recherche du système de projection le mieux approprié à la représentation d'une contrée particulière.

Conditions à remplir. — Notation.

38. Dans la construction d'une carte à grande échelle destinée aux services publics, comme celle qui a été dressée en France par le Dépôt de la Guerre, la condition la plus importante à remplir est relative à la reproduction des angles. Il n'est pas nécessaire que le mode de projection les conserve rigoureusement, mais il ne doit les altérer que de quantités assez faibles pour que chaque feuille de la carte constitue un véritable levé topographique.

Les distances étant inévitablement modifiées, l'échelle du dessin variera plus ou moins d'une feuille à l'autre. Il faut rendre cette variation aussi petite que possible en réduisant à son *minimum* la plus grande altération de longueur.

Enfin, avant de tracer le canevas, on aura à calculer les coordonnées d'un nombre considérable de points rapportés à deux axes rectangulaires. Une troisième condi-

(*) *Nouv. Ann.*, 2e série, t. XVII, p. 351.

tion à laquelle il convient de satisfaire réside dans la simplicité des formules employées à cet usage.

Ces conditions sont aussi celles que l'on doit chercher à réaliser dans la construction d'une carte ordinaire. Le but une fois atteint, non seulement les altérations seront aussi faibles que possible, mais il sera facile d'en tenir compte toutes les fois que l'on aura à faire usage de la carte. Il suffirait pour cela que l'on eût tracé légèrement sur cette carte, et avec une teinte différente de celles des autres lignes, quelques-unes des courbes le long desquelles l'altération de longueur est constante. Nous verrons que ces courbes sont du second degré et presque toujours des ellipses.

39. Sans faire d'abord d'autre hypothèse sur la forme de la surface terrestre, nous la considérerons comme étant de révolution autour de la ligne des pôles, et nous prendrons le rayon équatorial pour unité. Dans l'intérieur du pays à représenter, nous adopterons un point particulier, dit *point central,* dont nous apprendrons plus tard à déterminer exactement la position; le méridien et le parallèle de ce point seront appelés, respectivement, *méridien moyen* et *parallèle moyen*. Sur la carte, nous choisirons, pour origine des coordonnées, l'homologue du point central; l'axe des x sera tangent, et l'axe des y normal à la projection du méridien moyen. Enfin, nous ferons usage de la notation suivante, qui nous a déjà servi en partie :

l latitude d'un point quelconque de la contrée;
m longitude du même point comptée à partir du méridien moyen;

$\left.\begin{array}{l} x \text{ abscisse} \\ y \text{ ordonnée} \end{array}\right\}$ du point correspondant de la carte;

r rayon du parallèle terrestre à la latitude l;
ρ rayon de courbure du méridien à la même latitude;
N grande normale à la latitude l, ou longueur comprise sur la normale, entre le point considéré et la ligne des pôles;
l_0 latitude du parallèle moyen;
r_0 rayon du parallèle moyen;
ρ_0 rayon de courbure du méridien à la latitude l_0;
N_0 grande normale à la même latitude;
λ excès de la latitude du point considéré sur celle du parallèle moyen;
s arc de méridien compris entre le parallèle moyen et celui de latitude l;
t portion du parallèle moyen comprise entre le méridien moyen et celui de longitude m;
h rapport de longueurs sur le méridien, au point considéré;
k rapport de longueurs sur le parallèle;
θ altération de l'angle du méridien avec le parallèle;
a demi grand axe de l'ellipse indicatrice;
b demi petit axe de la même ellipse;
ω moitié du *maximum* de l'altération d'angle.

Les coordonnées qui déterminent la position d'un point quelconque sur la surface du globe peuvent être l et m, ou λ et m, ou encore s et t. On a d'ailleurs

$$\lambda = l - l_0, \quad t = r_0 m.$$

On a aussi

$$r = \mathrm{N} \cos l, \quad r_0 = \mathrm{N}_0 \cos l_0, \quad ds = \rho\, dl,$$

et, dans le triangle infiniment petit que l'on forme en abaissant, de l'une des extrémités de l'arc ds, une perpendiculaire sur le rayon du parallèle de l'autre extrémité,

$$\frac{dr}{ds} = -\sin l.$$

Carte d'un pays limité dans tous les sens.

40. Nous supposons que la contrée dont on veut dresser la carte est d'une étendue moyenne, comparable à celle de la France, de l'Espagne, etc., de sorte que les valeurs de s et de t restent toujours assez petites. Pour l'Espagne, par exemple, qui se trouve comprise entre les parallèles de 36 et de 44 degrés, et entre deux méridiens dont l'angle est d'environ 12° 40′, la plus grande valeur de s est à peu près $\frac{1}{14}$, et celle de t, $\frac{1}{13}$. Alors les coordonnées x et y d'un point quelconque de la carte peuvent être supposées développées en séries convergentes suivant les puissances de s et de t. D'après le choix qui a été fait pour l'origine, ces développements ne contiendront pas de terme indépendant des variables, et, à cause de la direction qui a été donnée à l'axe des x, le terme en s manquera dans y. Il nous reste à déterminer les coefficients des autres termes de manière que le système de projection satisfasse aux conditions qui ont été indiquées plus haut.

41. Des développements de x et de y on déduirait ceux de h, de k et de $\sin\theta$, par les formules

$$h = \left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad k = \frac{r_0}{r}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\sin\theta = \frac{r_0}{rhk}\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)\right].$$

Comme la dérivée de y par rapport à s ne renferme pas de terme constant, pour que le premier terme de h soit égal à l'unité, il faut que le coefficient de s, dans x, soit aussi égal à l'unité, et, pour que θ n'ait pas non plus de terme constant, il faut que x ne contienne pas de terme en t. Alors k se réduit à $\frac{r_0}{r}\left(\frac{dy}{dt}\right)$, sauf des termes du premier ordre ou d'ordres plus élevés en s et t. Par conséquent, si, abstraction faite des termes d'un ordre supérieur au premier, on prend x égal à s, et y à $\frac{r}{r_0}t$, l'angle θ et les différences des rapports h et k avec l'unité seront du premier ordre. Cherchons maintenant à les abaisser au second.

42. Le carré de la dérivée de y par rapport à s n'introduit dans h aucun terme du premier ordre; il faut donc que celui de la dérivée de x par rapport à s n'en introduise pas non plus, ce qui exige que x ne renferme ni terme en s^2, ni terme en st.

Un raisonnement analogue appliqué à k prouve que y ne doit contenir ni terme en st, ni terme en t^2. Alors les termes du premier ordre, dans $\sin\theta$, se réduisent à ceux de $\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{r}{r_0^2}\frac{dr}{ds}t$, ou à ceux de $\frac{dx}{dt} - \frac{\sin l_0}{r_0}t$. On les fera disparaître en donnant à t^2, dans le développement de x, le coefficient $\frac{\sin l_0}{2r_0}$. On est ainsi conduit à prendre, abstraction faite des termes du troisième ordre, x égal à $s + \frac{\sin l_0}{2r_0}t^2$, et y à $\frac{r}{r_0}t$.

43. Introduisons maintenant les termes du troisième ordre, en les affectant de coefficients arbitraires, et posons

$$(1)\quad \begin{cases} x = s + \dfrac{\sin l_0}{2r_0}t^2 + \dfrac{A}{3}s^3 - Bs^2t + Cst^2 + \dfrac{D}{3}t^3, \\ y = \dfrac{r}{r_0}t + \dfrac{A'}{3}s^3 + B's^2t - C'st^2 + \dfrac{D'}{3}t^3; \end{cases}$$

on aura, en négligeant les termes d'ordres supérieurs au deuxième,

$$h = 1 + A s^2 - 2 B s t + \left(C + \frac{\sin^2 l_0}{2 r_0^2} \right) t^2,$$

$$k = 1 + \frac{r_0}{r} \left[B' s^2 - 2 C' s t + \left(D' + \frac{r_0^2}{2 r^2} \operatorname{tang}^2 l_0 \right) t^2 \right],$$

$$\sin \theta = \frac{1}{r h k} \left[\left(\sin l_0 - \frac{r_0}{r} \sin l \right) t + (A' r - B r_0) s^2 \right.$$
$$\left. + 2 (B' r + C r_0) s t + (D r_0 - C' r) t^2 \right].$$

Sans modifier le degré de l'approximation, on peut remplacer l par l_0, et r par r_0, dans les coefficients des termes du deuxième ordre de h, k et $\sin \theta$. Quant à $r \sin l$, qui fait partie du coefficient de t dans $\sin \theta$, on lui substituera son développement borné à deux termes, savoir

$$r \sin l = r_0 \sin l_0 + \left(\frac{r_0}{\rho_0} \cos l_0 - \sin^2 l_0 \right) s \quad (*) .$$

Enfin, jusqu'ici nous avons toujours tenu compte de l'aplatissement, mais il est inutile d'y avoir égard dans les termes du second ordre ; nous remplacerons donc, dans ces termes, ρ_0 par l'unité et r_0 par $\cos l_0$. Il vient alors

$$h = 1 + A s^2 - 2 B s t + \left(C + \frac{1}{2} \operatorname{tang}^2 l_0 \right) t^2,$$

$$k = 1 + B' s^2 - 2 C' s t + \left(D' + \frac{1}{2} \operatorname{tang}^2 l_0 \right) t^2,$$

$$\sin \theta = (A' - B) s^2 + 2 \left(B' + C - \frac{\cos 2 l_0}{2 \cos^2 l_0} \right) s t + (D - C') t^2.$$

(*) Pour obtenir le coefficient de s dans ce developpement, il suffit de prendre la derivee de $r \sin l$ par rapport à s, puis de faire s egal a zero; or on a

$$\frac{d(r \sin l)}{ds} = r \frac{d(\sin l)}{dl} \frac{dl}{ds} + \sin l \frac{dr}{ds} = \frac{r}{\rho} \cos l - \sin^2 l.$$

Nous pouvons faire en sorte que θ et $h - k$ ne soient plus que du troisième ordre; il suffit, pour cela, de poser

$$A' = C' = D = B,\quad B' = A,\quad D' = C,\quad A + C = \frac{\cos 2l_0}{2\cos^2 l_0}.$$

Les formules

$$(a-b)^2 = (h-k)^2\cos^2\frac{\theta}{2} + (h+k)^2\sin^2\frac{\theta}{2},\qquad \sin\omega = \frac{a-b}{a+b}$$

font voir que $a - b$ et ω seront aussi du troisième ordre. Ainsi, A et C étant liés entre eux par la relation

$$(2)\qquad 2(A + C)\cos^2 l_0 = \cos 2l_0,$$

tous les modes de projection que définissent les formules

$$(3)\qquad \begin{cases} x = s + \dfrac{\sin l_0}{2r_0}t^2 + \dfrac{A}{3}s^3 - Bs^2t + Cst^2 + \dfrac{B}{3}t^3, \\ y = t - \dfrac{s}{r_0}t - \dfrac{B}{3}s^3 + As^2t - Bst^2 + \dfrac{C}{3}t^3 \end{cases}$$

possèdent, à l'exclusion des autres systèmes, la double propriété de ne produire que des altérations d'angles du troisième ordre, et des altérations de distances du second. Autour d'un même point, l'altération de l'unité de longueur est sensiblement la même dans toutes les directions; en l'appelant ε, on a

$$(4)\qquad \varepsilon = As^2 - 2Bst + \left(\frac{1}{2} - A\right)t^2.$$

Il est d'ailleurs impossible de l'abaisser au troisième ordre, puisque, dans cette dernière expression, le coefficient de s^2 et celui de t^2 ne sauraient être nuls en même temps.

Système du minimum *de déformation.*

44. Les altérations d'angles sont maintenant devenues négligeables. On pourrait les atténuer davantage, et même les détruire tout à fait, en introduisant, dans les développements de x et de y, des termes d'ordres supérieurs au troisième ; mais ces modifications, qui ne produiraient que des changements peu appréciables, lorsqu'il s'agirait de rapporter les longueurs sur la carte, compliqueraient les formules sans utilité réelle. Ce qu'il importe maintenant, c'est de disposer des coefficients A, B, C, dont deux sont arbitraires, de la constante l_0, enfin de la position du méridien moyen, de manière que la plus grande des valeurs que ε est susceptible de prendre, dans toute l'étendue de la carte, soit aussi faible que possible.

Quelles que soient les valeurs de A et de B, il existera toujours un angle E et une quantité F tels que l'on ait

$$\operatorname{tang} E = \frac{B}{A - \frac{1}{4}}, \quad F - \frac{1}{4} = \left(A - \frac{1}{4}\right) \operatorname{séc} E,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(5) \qquad A - \frac{1}{4} = \left(F - \frac{1}{4}\right) \cos E, \quad B = \left(F - \frac{1}{4}\right) \sin E.$$

Maintenant, au lieu des variables s et t, prenons-en deux autres u et v, liées aux premières par les relations

$$u = s \cos \frac{1}{2} E - t \sin \frac{1}{2} E,$$

$$v = s \sin \frac{1}{2} E + t \cos \frac{1}{2} E,$$

lesquelles donnent

$$s = u\cos\frac{1}{2}E + v\sin\frac{1}{2}E,$$

$$t = v\cos\frac{1}{2}E - u\sin\frac{1}{2}E.$$

En substituant ces dernières expressions à s et à t dans celle de l'altération de l'unité de longueur, on trouve

$$\begin{aligned}\varepsilon = &\left[\frac{1}{4} + \left(A - \frac{1}{4}\right)\cos E + B\sin E\right]u^2\\ &+ 2\left[\left(A - \frac{1}{4}\right)\sin E - B\cos E\right]uv\\ &+ \left[\frac{1}{4} - \left(A - \frac{1}{4}\right)\cos E - B\sin E\right]v^2,\end{aligned}$$

puis, en remplaçant $A - \frac{1}{4}$ et B par leurs valeurs en fonction de E et de F,

$$(6) \qquad \varepsilon = Fu^2 + \left(\frac{1}{2} - F\right)v^2.$$

Remarquons que, si s et t d'une part, u et v de l'autre, constituaient deux systèmes de coordonnées rectangulaires rapportées à la même origine, si de plus l'axe des u faisait avec celui des t un angle égal à $\frac{E}{2}$, les formules ci-dessus qui expriment ε, la première en fonction de s et de t, la seconde en fonction de u et de v, deviendraient, pour chaque valeur attribuée à ε, les deux équations d'une même courbe du second degré, ellipse ou hyperbole, dont les axes seraient situés sur les axes du second système de coordonnées. Enfin, Δ représentant la longueur du diamètre qui est incliné à 45 degrés sur les axes de la courbe, on aurait

$$(7) \qquad \varepsilon = \left(\frac{\Delta}{4}\right)^2.$$

Les ellipses correspondraient aux valeurs positives de F qui sont plus petites que $\frac{1}{2}$.

45. Cela posé, considérons l'un quelconque des systèmes de projection qui se trouvent définis par les formules (2) et (3). Des valeurs de A et de B qui lui correspondent, on peut déduire celles de E et de F; supposons, pour fixer les idées, que cette dernière soit positive et non supérieure à $\frac{1}{2}$. Construisons, à une échelle assez faible, une carte auxiliaire de la contrée en plaçant chaque point d'après deux coordonnées rectangulaires respectivement égales à s et à t. Par l'origine, menons une droite faisant, avec l'axe des t, un angle égal à $\frac{1}{2}$ E, et une seconde droite perpendiculaire à la première. Traçons une ellipse dont les axes se trouvent sur les deux droites et aient leurs carrés inversement proportionnels aux nombres F et $\frac{1}{2}$ — F. Enfin traçons d'autres ellipses homothétiques à la première, et dont la plus grande, que nous appellerons *l'ellipse limite,* enveloppe le contour de la carte auxiliaire, tout en ayant avec lui un ou plusieurs points communs. Chaque ellipse marquera sur cette carte le lieu des points pour chacun desquels l'altération de l'unité de longueur est égale au carré du quart du diamètre incliné à 45 degrés sur les axes. Nulle pour le centre commun des ellipses, l'altération ira en augmentant peu à peu à mesure que l'on s'écartera de ce point, et atteindra sa plus grande valeur sur l'ellipse limite.

Il est permis de négliger l'aplatissement dans le calcul de l'altération ε, par conséquent aussi dans la construction de la carte auxiliaire, ce qui revient à prendre, pour coordonnées des divers points de cette carte, non plus s et t, mais λ et $m \cos l_0$; dans la dernière, on peut même remplacer l_0 par une valeur approchée exprimant un nombre exact de degrés ou de demi-degrés et se rapportant à la latitude d'un point de la région centrale du pays. La carte auxiliaire ainsi obtenue sera la même pour tous les modes de projection. Ce qui varierait de l'un à l'autre, ce serait la forme des ellipses dont nous avons fait usage tout à l'heure, la direction de leurs axes et la position de leur centre commun. Il s'agit de déterminer ces éléments de manière que, dans l'ellipse limite, le diamètre également incliné sur les axes soit le plus petit possible.

46. Ayant tracé la carte auxiliaire, ou seulement les quelques portions de son contour que l'on présume devoir être utiles, on construit, d'autre part, des ellipses de formes diverses, en attribuant, par exemple, au rapport des deux axes, les valeurs zéro, un dixième, deux dixièmes, trois dixièmes, etc., jusqu'à un, de manière à passer ainsi graduellement du système de deux droites parallèles à la circonférence. On calque chaque courbe sur une feuille spéciale de papier transparent, et l'on dessine, sur cette feuille, un certain nombre d'autres courbes homothétiques à la première. On applique l'une des feuilles ainsi obtenues sur la carte auxiliaire, puis on la fait glisser et tourner de manière à déplacer, sur cette carte, le centre commun des ellipses de la feuille et à changer la direction de leurs axes, jusqu'à ce que l'on ait trouvé la position dans laquelle l'ellipse limite est la plus petite possible. On mesure alors le diamètre de cette ellipse qui divise en deux parties égales l'angle des axes. On renouvelle les mêmes essais successivement avec les autres feuilles. Celle qui fournit la plus petite longueur pour le

diamètre mesuré correspond au système de projection que l'on cherche, et il est facile de remonter aux formules par lesquelles ce système se trouvera défini.

D'abord, du résultat obtenu par la mesure du diamètre, on déduit la plus grande altération de l'unité de longueur à l'aide de la formule (7). Le rapport du grand axe au petit, dans les ellipses de la feuille, fait connaître F, car, en appelant G ce rapport, on a, d'après l'équation (6),

$$(8) \qquad F = \frac{1}{2(G^2+1)}.$$

La feuille ayant été mise en place sur la carte auxiliaire, le point de cette carte qui se trouve couvert par le centre commun des ellipses donne le point central; sa latitude est l_0; son méridien et son parallèle sont le méridien et le parallèle moyens. En doublant l'angle que fait alors le grand axe des ellipses avec les parallèles de la carte, on obtient l'angle E. Les valeurs de E et de F étant connues, on calcule celles de A et de B par les formules (5), puis celle de C par l'équation (2); il n'y a plus alors qu'à introduire ces valeurs et celle de l_0 dans les formules (3).

47. La comparaison, telle que nous venons de l'effectuer, ne porte que sur les systèmes de projection dans lesquels F est compris entre zéro et $\frac{1}{2}$. Pour une valeur de F négative ou plus grande que $\frac{1}{2}$, les points où la représentation produit la même altération de longueur se répartissent, sur la carte auxiliaire, suivant des hyperboles homothétiques; celles-ci se trouvent nécessairement conjuguées deux à deux, sauf l'une d'elles qui se réduit à un système de deux droites servant aux autres

d'asymptotes. En tout point correspondant à l'une de ces droites, la projection conserve les distances ; pour deux points appartenant respectivement à deux hyperboles conjuguées, l'altération de l'unité de longueur prend des valeurs égales et de signes contraires, mesurées par le carré du quart du diamètre incliné à 45 degrés sur les axes, diamètre qui est réel dans l'une des deux courbes. On voit d'après cela comment, à l'aide de la carte auxiliaire et de groupes d'hyperboles tracées sur papier transparent, on pourra déterminer le plus avantageux des modes de projection pour lesquels F est négatif ou plus grand que $\frac{1}{2}$. Il ne restera plus qu'à choisir entre ce dernier et celui qu'auront fourni les autres valeurs de F, ce qui se fera sans hésitation, par la comparaison des diamètres à 45 degrés dans l'ellipse et dans l'hyperbole limites.

48. La plupart du temps, on reconnaîtra d'avance l'inutilité de la seconde série d'essais, d'autant plus que, dans la comparaison dont nous venons de parler, ce n'est pas le diamètre même de l'hyperbole qui doit figurer, mais son produit par $\sqrt{2}$. En effet, pour les systèmes de projection appartenant à la première série, l'altération de l'unité de longueur est partout positive, tandis que pour chacun des systèmes de la seconde elle est tantôt positive et tantôt négative, ce qui double ses variations. Il y aurait lieu de faire une remarque analogue sur les modes de projection qui, autour d'un même point, augmentent ou diminuent les distances, suivant la direction ; tel est celui de la carte du Dépôt de la Guerre. Pour éviter ces distinctions et rendre les systèmes de la première série immédiatement comparables aux autres, nous supposerons qu'avant d'appliquer les formules (3)

on retranche, de chacun des coefficients, une fraction de sa valeur marquée par la moitié de la plus grande altération de l'unité de longueur, ce qui revient à un changement d'échelle et ne saurait modifier les angles sur la carte. Alors les distances seront conservées en tous les points de l'ellipse dont le rapport d'homothétie avec l'ellipse limite est $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Négative à l'intérieur de la première courbe et positive à l'extérieur, l'altération de longueur augmentera, en valeur absolue, pour des points de plus en plus éloignés de son contour; au centre et sur l'ellipse limite, cette valeur absolue atteindra son *maximum*, qui ne sera plus que la moitié de ce qu'il était auparavant.

49. Les expressions du troisième ordre que nous avons ajoutées à $s + \frac{\sin l_0}{2 r_0} t^2$ et à $\frac{r}{r_0} t$, pour compléter x et y, dans les formules (1), ne comportent pas toute la généralité possible, car la grandeur relative d'un terme ne dépend pas seulement de son degré, mais aussi de son coefficient. Aux termes du troisième degré, nous devons en joindre d'autres du second et d'autres du premier, en les supposant affectés de coefficients comparables, pour ceux-là, aux valeurs que peuvent prendre s et t dans l'intérieur ou sur le contour de la contrée, et, pour ceux-ci, aux carrés des mêmes valeurs. Ces coefficients se grouperont entre eux, et non avec ceux des termes du troisième degré, dans les développements de h, de k et de $\sin\theta$, et l'on établira facilement les relations auxquelles ils doivent satisfaire pour que les altérations d'angles restent comparables aux grandeurs du troisième ordre, et les altérations de distances à celles du second. On trouve que les valeurs (3) de x et de y doivent être com-

plétées par les expressions suivantes :

$$\xi = \quad A_1 s^2 + 2B_1 st - A_1 t^2 + A_2 s,$$
$$\eta = - B_1 s^2 + 2A_1 st + B_1 t^2 + A_2 t,$$

dans lesquelles A_1, B_1 et A_2 désignent des coefficients arbitraires, mais de grandeurs comparables, les deux premiers aux valeurs que s et t sont susceptibles de prendre, le troisième aux carrés de ces mêmes valeurs. Quant à l'altération de l'unité de longueur, elle devient

$$\varepsilon = As^2 - 2Bst + \left(\frac{1}{2} - A\right)t^2 + 2A_1 s + 2B_1 t + A_2.$$

En général, on pourra faire disparaître les termes du premier degré qui figurent dans ε, en remplaçant les variables s et t par d'autres ayant avec elles des différences constantes. On pourrait ensuite faire abstraction du terme constant, ce qui reviendrait à changer d'échelle dans la construction de la carte. On retomberait alors sur l'expression (4). Les seuls modes de projection que nous ayons à examiner sont ceux qui ne se prêteraient pas à ces transformations, c'est-à-dire ceux pour lesquels on aurait

$$B^2 = A\left(\frac{1}{2} - A\right).$$

Le changement de coordonnées dont on fait usage dans la réduction de l'équation de la parabole à sa forme la plus simple pourra être employé ici. Alors, u et v étant les nouvelles variables, et C_1 désignant un coefficient constant, on trouvera

$$\varepsilon = \frac{1}{2}v^2 - C_1 u.$$

Les points où la représentation produit la même altération de longueur se répartissent cette fois, sur la carte auxiliaire, suivant des paraboles égales ayant leurs axes sur une même droite. Les valeurs u et v étant considérées comme deux coordonnées rectangulaires, l'altération est nulle sur la parabole qui a son sommet à l'origine. Sur deux paraboles ayant leurs sommets équidistants de ce point, l'altération prend des valeurs égales et de signes contraires mesurées par la moitié du carré de la demi-corde que l'une d'elles intercepte sur la tangente au sommet de la parabole qui passe par l'origine. On voit comment, à l'aide de la carte auxiliaire de la contrée, et de groupes de paraboles tracées sur papier transparent, on pourra déterminer le plus avantageux des modes de projection pour lesquels B^2 est égal à $A\left(\frac{1}{2} - A\right)$. Il sera facile ensuite de le comparer à celui qui aura été obtenu par les tracés d'ellipse. En général, ce dernier sera le plus avantageux, et c'est ce que l'on reconnaîtra souvent sans avoir recours aux essais qui viennent d'être indiqués.

Cas particuliers.

50. Si le contour du pays présente une certaine symétrie par rapport à un méridien ou par rapport à un parallèle, l'angle E sera assez voisin de zéro ou de 90 degrés. On lui donnera alors une de ces deux valeurs, afin de simplifier les formules, lesquelles deviendront

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} x &= s + \frac{\sin l_0}{2r_0}t^2 + \frac{A}{3}s^3 + Cst^2, \\ y &= \frac{r}{r_0}t + As^2t + \frac{C}{3}t^3, \\ \varepsilon &= As^2 + \left(\frac{1}{2} - A\right)t^2. \end{aligned}\right.$$

Dans les essais qui auront pour but de déterminer la valeur de A, on aura soin de maintenir le grand axe des ellipses perpendiculaire ou parallèle aux méridiens de la carte auxiliaire.

51. En prenant de plus A égal à zéro, on aurait

$$(10)\qquad \begin{cases} x = s + \dfrac{\sin l_0}{2 r_0} t^2 + \dfrac{\cos 2 l_0}{2\cos^2 l_0} s t^2, \\ y = \dfrac{r}{r_0} t + \dfrac{\cos 2 l_0}{6 \cos^2 l_0} t^3, \\ \varepsilon = \dfrac{1}{2} t^2. \end{cases}$$

Telles sont les formules qu'il conviendrait d'adopter si, dans le système qui correspond au *minimum* de la plus grande valeur de ε, le coefficient A était assez petit. Dans le cas où le parallèle de latitude moyenne serait voisin de celui de 45 degrés, elles se réduiraient à

$$x = s + \frac{1}{2} r_0 \sin l_0 m^2, \quad y = rm, \quad \varepsilon = \frac{1}{4} m^2.$$

52. L'angle E étant toujours supposé nul ou droit, si les essais conduisent à une valeur de A peu différente de $\frac{1}{2}$, on prendra A exactement égal à $\frac{1}{2}$, et, par conséquent, C à $-\frac{1}{2}\operatorname{tang}^2 l_0$. Il viendra

$$(11)\qquad \begin{cases} x = s + \dfrac{\sin l_0}{2 r_0} t^2 + \dfrac{1}{6} s^3 - \dfrac{1}{2} \operatorname{tang}^2 l_0 s t^2, \\ y = \dfrac{r}{r_0} t + \dfrac{1}{2} s^2 t - \dfrac{1}{6} \operatorname{tang}^2 l_0 t^3, \\ \varepsilon = \dfrac{1}{2} s^2. \end{cases}$$

53. On adoptera aussi soit le système (10), soit le système (11), quand les points de contact des ellipses li-

mites avec le contour du pays se trouveront dans le voisinage du diamètre incliné à 45 degrés sur les axes, car alors en chacun de ces points la valeur de s sera sensiblement la même que celle de t, et celle de ε, que l'on peut écrire

$$\varepsilon = \frac{1}{2} t^2 + A(s^2 - t^2),$$

deviendra à peu près indépendante de A.

54. On peut d'ailleurs présenter le système (11) sous une forme beaucoup plus simple, et lui donner une définition géométrique. Le développement de r borné à trois termes est

$$r = r_0 - \sin l_0 s - \frac{\cos l_0}{\rho_0} s^2;$$

si on le substitue à r dans y, si l'on néglige l'aplatissement dans les termes du troisième ordre et que l'on continue à supprimer ceux du quatrième, enfin si l'on pose

$$(12) \qquad R_0 = r_0 \operatorname{coséc} l_0, \quad R = R_0 - s - \frac{1}{6} s^3, \quad \mu = m \sin l_0,$$

les formules (10) deviendront identiques aux suivantes :

$$(13) \qquad x = R_0 - R \cos\mu, \quad y = R \sin\mu.$$

Celles-ci donnent pour l'équation d'un méridien quelconque

$$y = (R_0 - x) \operatorname{tang}\mu,$$

et, pour celle d'un parallèle,

$$y^2 + (R_0 - x)^2 = R^2.$$

Ainsi les méridiens de la carte sont des droites concourantes, et les parallèles, des circonférences concentriques. Les méridiens et le parallèle moyen sont tels qu'on les obtiendrait dans le développement du cône circonscrit, le long de ce parallèle, à la surface terrestre. La distance comprise entre le parallèle moyen et tout autre de la carte est égale à l'arc de méridien que ces deux parallèles interceptent sur le globe augmenté de la sixième partie de son cube. Comme rien ne distingue les méridiens les uns des autres dans ce mode de projection, il conserve ses propriétés quelle que soit, dans le sens des longitudes, l'étendue du pays que l'on veut représenter. On adoptera un parallèle moyen dont la latitude diffère peu de la moyenne arithmétique entre les deux latitudes extrêmes.

55. Pour calculer l'arc s, qui figure dans les formules relatives à nos divers modes de projection, on se servira de son développement suivant les puissances de λ; en négligeant l'aplatissement dans les termes d'ordre supérieur au deuxième, on a

$$s = \rho_0 \lambda^2 + \frac{3\rho_0(N_0 - \rho_0)}{2N_0} \operatorname{tang} l_0 \lambda^2.$$

56. Considérons maintenant les méridiens terrestres comme des ellipses et soit e l'excentricité. Il viendra

$$N = \frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{1}{2}}}, \quad \rho = \frac{1 - e^2}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}};$$

d'où l'on conclut, en négligeant e^4 dans les termes du deuxième ordre,

$$s = \rho_0 \lambda + \frac{3}{4} e^2 \sin 2 l_0 \lambda^2.$$

En particulier, si nous nous reportons au système de projection défini par les formules (12) et (13), nous trouverons, en introduisant cette expression de s dans celle du rayon des parallèles de la carte,

$$R = R_0 - \rho_0 \left(\lambda + \frac{3}{4} e^2 \sin 2 l_0 \lambda^2 + \frac{1}{6} \lambda^3 \right). \tag{14}$$

Au second membre de cette égalité, le facteur ρ_0 doit être maintenu devant λ, mais, devant les autres termes, il ne sert qu'à mettre en évidence l'homogénéité.

(*A suivre.*)