Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 321-334

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__321_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES

Question 1259

(voir 2e série, t. XVII, p. 238);

PAR M. MORET-BLANC.

Si l'on développe l'expression $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^n$ *suivant les puissances de* α: 1° *le développement aura toujours un nombre impair de termes ;* 2° *les coefficients de la lettre ordonnatrice des termes équidistants de celui du milieu sont identiquement égaux ;* 3° *si l'on égale à zéro ces coefficients, qui sont des polynômes entiers et rationnels en* x, *ils ont toutes leurs racines imaginaires lorsqu'ils sont de degré pair, et ils renferment, en outre, une racine nulle lorsqu'ils sont de degré pair.*

(ESCARY.)

1° Le développement est un polynôme en α de degré $2n$, qui a $2n+1$ termes ; nous verrons qu'aucun coefficient n'est nul.

2° L'équation en α, $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^n = 0$, est réciproque: donc les coefficients des termes équidistants de celui du milieu sont identiquement égaux.

3° $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^n$

$$= (1 + \alpha^2)^n - \frac{n}{1} 2\alpha x (1 + \alpha^2)^{n-1}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2} 4\alpha^2 x^2 (1 + \alpha^2)^{n-2}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} 8\alpha^3 x^3 (1 + \alpha^2)^{n-3} + \ldots.$$

Remarquons d'abord que le développement de $(1 + \alpha^2)^n$ renferme toutes les puissances paires de α, depuis α^0 jusqu'à α^{2n}.

Cela posé, le coefficient d'une puissance paire de α est un ploynôme de degré pair en x, et composé de termes tous positifs et de degrés pairs; il renferme un terme indépendant de x : donc ce coefficient ne s'annule pour aucune valeur réelle de x.

Le coefficient d'une puissance impaire de α est un polynôme en x de degré impair, composé de termes tous négatifs et de degrés impairs, dont un du premier degré; donc ce coefficient s'annule pour $x = 0$, et ne s'annule pour aucune autre valeur.

Note. — Solutions analogues de MM. Sondat; de Virieu; Beaugey et Manipoud, élèves du lycée de Grenoble.

Question 1268

(voir 2e série, t. XVII, p. 287);

PAR M. H. LEZ.

Lieu du point de la tangente à l'hypocycloïde

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}$$

qui est conjugué harmonique du point de contact par rapport aux axes de coordonnées.

(GAMBEY.)

On sait que la courbe $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}}$ est l'enveloppe d'une droite AB de longueur r, dont les deux extrémités A, B glissent sur deux axes rectangulaires OX, OY, et que le point de contact C est le pied de la perpendiculaire menée à AB, du quatrième sommet M du rectangle AOBM construit sur OA et OB (*). Il résulte de cette construction qu'en désignant par a et b les distances variables OA, OB, le point de contact C a pour coordonnées $x = \frac{a^3}{a^2 + b^2}$, $y = \frac{b^3}{a^2 + b^2}$; et les droites AB, OC, respectivement, pour équations

$$bx + ay = ab, \tag{1}$$

$$b^3x - a^3y = 0 \tag{2}$$

L'équation de la droite OD, conjuguée harmonique de OC par rapport aux axes de coordonnées, est

$$b^3x + a^3y = 0. \tag{3}$$

En éliminant a et b entre les équations (1), (3), et $a^2 + b^2 = r^2$, on aura l'équation du lieu proposé.

Des équations (1) et (3) on tire

$$(b - y)^3 = -x^2y, \quad (a - x)^3 = -y^2x,$$

d'où

$$a = x - x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}, \quad b = y - x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}};$$

la substitution de ces expressions de a et b, dans l'égalité $a^2 + b^2 = r^2$, donne l'équation

$$\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}\right)^2 = r^2,$$

(*) Le lecteur est prie de faire la figure.

qu'on peut mettre sous la forme

$$(x^2+y^2-r^2)^3 = x^2y^2\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^3.$$

Le lieu passant par les points

$$x=\pm r,\quad y=\pm r\sqrt{2\pm\sqrt{5}}$$

et

$$x=\pm\frac{r}{\sqrt{3}},\quad y=\pm 2r\sqrt{\frac{2}{3}}$$

comprend quatre branches doubles, indéfinies, symétriques par rapport aux axes coordonnés qu'elles touchent en se réunissant à une distance r de l'origine O.

Les différents points de ce lieu répondant directement à la question se construisent facilement. Il suffit de décrire un cercle sur $AB = r$, comme diamètre; puis de mener par le point M, sommet du rectangle inscrit AOBM, une tangente MD, qui rencontrera AB en un point D, conjugué harmonique de C, par rapport aux points A et B.

Note. — La meme question a ete resolue par MM. Fauquembergue, Moret-Blanc; Sondat, Pisani; Chambon; E. Rodier et Eugene Delmas, eleves de Mathematiques speciales au lycee de Lyon.

Question 1282

(voir 2ᵉ serie, t XVII, p 384),

PAR M. ALBERT LACAZETTE,

Éleve du lycee de Bordeaux.

Si d'un point B *d'une hyperbole équilatère dont le centre est* O *on abaisse une perpendiculaire* BC *sur une tangente en* A, *l'angle* COA *est double de* CAB.

(A. CAMBIER.)

Soit I le milieu de AB; on sait que les quatre points A, C, O, I sont sur une même circonférence. Par suite, l'angle COA et l'angle CIA sont égaux comme inscrits dans un même, segment. Mais, CI étant une médiane du triangle CAB rectangle en C, l'angle

$$\text{CIA} = 180^\circ - 2\,\text{CAB};$$

donc

$$\text{COA} = 180^\circ - 2\,\text{CAB} = 2(90^\circ - \text{CAB})\ (^*).$$

Note. — M. Charvet, élève du lycée de Grenoble, donne une solution fondée sur ce lemme :

Si par deux points A, B *d'une hyperbole équilatère, non situés sur une même branche, on fait passer une circonférence, ayant* AB *pour diamètre, la seconde corde d'intersection passe par le centre de l'hyperbole.*

En faisant application de ce lemme à la question proposée, M. Charvet distingue deux cas, suivant que les points B, A appartiennent à une même branche de l'hyperbole, ou à deux branches différentes; dans le premier cas, l'angle COA est double de CAB ; dans le second, l'angle COA est double du complément de CAB.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez, Moret-Blanc, Pisani.

Question 1284

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 384);

PAR M. E. FAUQUEMBERGUE,
Maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin.

On décrit tous les cercles simplement tangents à une conique B *en un point* C. *On mène à chacun de ces cercles des tangentes parallèles à deux diamètres fixes de la conique ; trouver le lieu géométrique des points* M *d'intersection de ces tangentes.*

(BARBARIN.)

(*) Quand les points A, B appartiennent à une même branche de l'hyperbole, les angles COA. CIA sont supplémentaires, et c'est alors que COA = 2 CAB. (*Note du rédacteur.*)

Tous ces cercles sont homothétiques, et le point C est le centre d'homothétie. Or, on sait que les tangentes homologues de deux cercles homothétiques sont parallèles; les points d'intersection de deux systèmes de tangentes homologues sont donc homothétiques, c'est-à-dire qu'ils se trouvent sur une droite passant par le point C; et, comme à chacune des deux directions données correspond un couple de tangentes, il y a quatre points d'intersection qui sont les sommets d'un parallélogramme; donc le lieu des points M se compose de quatre droites issues du point C.

Note. — La même question a été résolue par MM. Ferdinando Pisani; Moret-Blanc; Albert Lacazette, élève du lycée de Bordeaux; L. Julliard, du lycée Corneille, à Rouen.

Question 1288

(voir 2^e^ série, t. XVII, p. 479);

PAR M. GAMBEY.

Une parabole P, *de paramètre constant, se meut dans son plan parallèlement à elle-même, de façon que chacun de ses points décrive une parabole* P' *de paramètre donné, dont l'axe soit parallèle à celui de la parabole mobile. Trouver l'enveloppe des polaires d'un point fixe donné, par rapport à la parabole* P.

Même question en supposant la parabole P' *remplacée par une droite de direction quelconque.*

(LAISANT.)

La parabole fixe P' que décrit le sommet de la parabole P ayant pour équation

$$y^2 = 2p'x,$$

cette dernière sera, par rapport aux mêmes axes, représentée par

$$(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha),$$

$2p$ étant son paramètre, et α, β les coordonnées du point d'intersection.

La polaire d'un point (a, b) par rapport à P a pour équation

$$(1) \qquad \beta^2 - \beta(y+b) + 2p\alpha - p(x+a) + by = 0,$$

avec la relation

$$(2) \qquad \beta^2 - 2p'\alpha = 0.$$

L'enveloppe de (1) s'obtiendra en écrivant d'abord que les dérivées par rapport à α et à β sont proportionnelles dans les relations (1) et (2), ce qui donne

$$(3) \qquad \frac{p}{p'} = \frac{y+b-2\beta}{2\beta}.$$

Ensuite il faudra éliminer α et β entre (1), (2) et (3). Cette élimination n'a rien de difficile et conduit à

$$(y+b)^2 + \frac{4(p+p')}{p'}(px - by + pa) = 0,$$

équation d'une autre parabole dont l'axe est parallèle à ceux des précédentes.

Si la parabole P′ est remplacée par une droite donnée, on rapportera la parabole P à celui de ses diamètres qui est conjugué de la direction donnée. Son équation sera alors, avec un seul paramètre variable,

$$(y-\beta)^2 - 2px = 0.$$

La méthode précédente conduira à l'équation

$$(y+b)^2 + 4p(x+a) - 4by = 0,$$

qui représente encore une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe de P, et dont le paramètre est double.

Note. — Solutions analogues de MM. Moret-Blanc; Fauquembergue, Ferdinando Pisani; Robaglia; J. Griess, maître répétiteur au lycée d'Alger; Julliard, élève du lycée Corneille, à Rouen.

M. Robaglia a donné une solution géométrique.

Question 1291

(voir 2e série, t. XVII, p. 480),

PAR M. ROMERO.

L'équation $x^4+x^3+x^2+x-1=y^2$ *est impossible en nombres entiers et positifs.*

Dans toute solution en nombres entiers de cette équation, y étant nécessairement *impair*, l'équation proposée peut s'écrire

$$(1)\qquad x(x+1)(x^2+1)=2[m^2+(m+1)^2].$$

x ne peut avoir aucune des formes $4n$, $4n\pm1$, parce qu'il en résulterait que le premier membre serait multiple de 4, tandis que le second membre ne contient le facteur 2 qu'à la première puissance. Donc x est de la forme $4n+2$, et par suite l'équation (1) devient, en divisant ses deux membres par 2,

$$(2n+1)(4n+3)[(2n+1)^2.4+1]=m^2+(m+1)^2,$$

où $4n+3$ est diviseur de la somme $m^2+(m+1)^2$ de deux carrés premiers entre eux; mais on sait qu'un nombre de la forme $4n+3$ ne peut être égal à la somme de deux carrés : donc l'équation proposée est impossible en nombres entiers et *positifs*.

Note. — La même question a été résolue par MM. Meyl et Moret-Blanc. M. Meyl a démontré, de plus, que l'équation admet seulement les solutions entières négatives : $x=-2$, $y=\pm3$.

Question 1293

(voir 2e série, t. XVII, p. 480);

PAR M. MORET-BLANC.

Trouver un nombre qui soit égal à la somme des chiffres de son cube. (LAISANT.)

Le nombre et son cube divisés par 9 doivent donner le même reste ; un cube étant nécessairement de l'une des formes $9m$, $9m-1$, $9m+1$, il en est de même des nombres satisfaisant à la condition posée.

Ces nombres ne peuvent se trouver que parmi les nombres d'un ou deux chiffres, car, le cube d'un nombre de trois chiffres ayant au plus neuf chiffres, la somme des chiffres de son cube est inférieure à $81 < 100$.

Le cube d'un nombre de deux chiffres ayant au plus six chiffres, la somme des chiffres de son cube est inférieure à 54.

Il faut exclure 53, dont le cube est terminé par 7, la somme des chiffres ne pouvant excéder 52 ; de même que 44, 45, 46, dont le cube, composé de cinq chiffres, est terminé par 4, 5 ou 6, la somme des chiffres ne peut excéder 42.

En formant les cubes des nombres de forme $9m-1$, $9m$, $9m+1$ de 1 à 37, on trouve les solutions suivantes :

Nombres....	1,	8,	17,	18,	26,	27.
Cubes.....	1,	512,	4913,	5832,	17576,	19683.

Il n'y a pas d'autre solution.

Note. — Solution analogue de M. de Virieu.

Question 1294

(voir 2ᵉ série, t. XVII, p. 480);

PAR M. A. LAISANT.

Démontrer que la somme des inverses de n nombres positifs en progression arithmétique excède le quotient de n^2 par la somme des termes de la progression.

Déduire de cette proposition la divergence de la série

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}\right)\\&\qquad+\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\frac{1}{8}\right)+\ldots\end{aligned}\right.$$

(LIONNET.)

La première partie de l'énoncé qui précède n'est pas assez générale. Il n'est nullement nécessaire que les n nombres soient en progression arithmétique; il suffit qu'ils soient positifs. Désignons, en effet, ces nombres par $a_1, a_2, \ldots, a_n$. On sait, et il est facile de le démontrer, que *leur moyenne arithmétique* A *est supérieure à leur moyenne géométrique* G; appliquant cette même propriété à leurs inverses, nous avons

$$\frac{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}}{n} > \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}} > \frac{1}{\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}}.$$

Donc

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n} > \frac{n^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}.$$

Plus directement, si l'on fait le produit de

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$$

par $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, on obtient n^2 termes

$$\begin{array}{cccc}
1, & \dfrac{a_2}{a_1}, & \ldots, & \dfrac{a_n}{a_1}, \\[2ex]
\dfrac{a_1}{a_2}, & 1, & \ldots, & \dfrac{a_n}{a_2}, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\dfrac{a_1}{a_n}, & \dfrac{a_2}{a_n}, & \ldots, & 1,
\end{array}$$

dont les uns sont égaux à l'unité et dont les autres se groupent deux à deux suivant la forme $\frac{a_i}{a_k} + \frac{a_k}{a_i} > 2$. Le produit est donc plus grand que le résultat qu'on obtiendrait en remplaçant tous les termes par l'unité, dans le Tableau précédent, c'est-à-dire que n^2.

Quant à la série proposée, on voit que les sommes des dénominateurs des termes positifs entre parenthèses sont respectivement

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3,\ \ldots.$$

Donc la somme de la série est plus grande que

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2^2}{2^3} - \frac{1}{2.2}\right) + \left(\frac{3^2}{3^3} - \frac{1}{2.3}\right) + \ldots$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right).$$

Cette somme croît, comme l'on sait, au delà de toute limite. La série est donc divergente.

M. Bertrand, dans son *Traité de Calcul différentiel* (p. 250) démontre la convergence de la série

$$(b)\quad \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}\right) + \ldots,$$

dont la somme est égale à $\frac{3}{2}\log 2$. La comparaison des séries (a) et (b) nous montre donc un nouvel et intéressant exemple de l'influence du groupement des termes sur la convergence.

Il est évident, par ce qui précède, que la série ci-dessous est elle-même divergente si α est une quantité positive déterminée, inférieure à l'unité :

$$(1-\alpha)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{\alpha}{2}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{\alpha}{3}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\frac{\alpha}{4}\right)+\ldots.$$

La somme est supérieure à $(1-\alpha)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\right)$.

Remarques. — I. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont en progression arithmétique, on a la formule plus simple

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}>\frac{2n}{a_1+a_n}.$$

II. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont en progression harmonique, il vient

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_n}>\frac{2n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Ferdinando Pisani; de Virieu; Fauquembergue; Moret-Blanc; L. Fourcade et P. Anthoine, élèves en Mathématiques spéciales au collége Rollin, classe de M. Ribout; Boell, élève du lycée du Havre.

Question 1303

(voir 2e série, t. XVII, p. 527);

PAR M. A.-J.-F. MEYL,

Ancien capitaine d'artillerie à La Haye.

Trouver toutes les solutions entières de l'équation

$$x^2+7x=2y(y+3)(y^2+3y+5).$$

(LIONNET.)

En multipliant cette équation par 2, elle peut s'écrire

$$2x^2 + 14x = (2y^2 + 6y + 5 - 5)(2y^2 + 6y + 5 + 5),$$

ou bien

$$2x^2 + 14x + 25 = (2y^2 + 6y + 5)^2,$$

ce qu'on peut mettre sous la forme

$$(x + 3)^2 + (x + 4)^2 = [(y + 1)^2 + (y + 2)^2]^2.$$

Or, d'après le théorème de M. de Jonquières (*voir* 2e série, t. XVII, p. 307, etc.), cette équation n'admet que les valeurs $x + 3 = 3$ et $x + 3 = -4$, à chacune desquelles correspondent les deux valeurs $y + 1 = 1$ et $y + 1 = -2$. On a donc les quatre solutions

$$\left.\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -7, \end{array}\right\} y = 0, \quad y = -3.$$

Mais, en considérant la seule solution impropre de l'équation du théorème précité, savoir

$$(0)^2 + (\pm 1)^2 = [(0)^2 + (\pm 1)^2]^2,$$

on a encore les solutions $x + 3 = 0$ et $x + 3 = -1$, à chacune desquelles correspondent les deux valeurs $y + 1 = 0$ et $y + 1 = -1$, ce qui donne encore les quatre solutions

$$\left.\begin{array}{l} x = -3, \\ x = -4, \end{array}\right\} y = -1, \quad y = -2.$$

Ces huit solutions sont les seules possibles.

Le second système de ces solutions est fourni immédiatement par l'inspection de l'équation donnée; en ajoutant à chaque membre de cette équation le nombre 12, on trouve sans difficulté

$$(x + 3)(x + 4) = 2(y + 1)(y + 2)(y^2 + 3y + 3),$$

qui donne le second système.

Question 1304
(voir 2e série, t. XVII, p. 527);

PAR M. C. BOELL,
Élève du lycée du Havre.

La somme des distances du centre du cercle circonscrit aux deux côtés AB, AC *du triangle inscrit*, ABC, *est égale à la corde menée par le point* C, *perpendiculairement à* AC *dans le cercle décrit sur* DC, *comme diamètre*, D *étant le milieu de l'arc* BC.

(A. CAMBIER.)

Soient OM, ON les distances du centre O, aux deux côtés AB, AC, et CP la corde du cercle décrit sur DC, comme diamètre, perpendiculairement à AC [*].

Prolongeons la droite PD qui est parallèle à CA, jusqu'à sa rencontre en E avec la circonférence circonscrite au triangle ABC.

Soit OR la distance du centre O à la corde DE; OR est le prolongement de ON, et la droite RN est égale et parallèle à PC. Le théorème sera donc démontré si l'on prouve que OM = OR.

Or les deux arcs CD, AE sont égaux, comme compris entre les parallèles AC, ED; d'autre part, l'arc CD = l'arc DB : donc arc AE = arc DB, et, en ajoutant aux deux membres de l'égalité l'arc EB, on a

arc AB = arc ED.

L'égalité des arcs entraîne celle des cordes AB, ED, et, par suite, l'égalité des distances OM, OR. Le théorème est donc démontré.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez; Ferdinand Pisani; Robaglia; Fabry, du collège Chaptal; Paul Le Roux et R. Wolf, élèves au Lycée de Rennes; Albert Renou, élève du Lycée de Caen; Louis Cauret, et par un anonyme.

[*] Le lecteur est prié de faire la figure.