NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ED. GUILLET

Solution de la question de géométrie analytique, proposée en 1878 aux candidats aux bourses d'études préparatoires à la licence ès sciences mathématiques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 31-32

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__31_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

PROPOSÉE EN 1878

AUX CANDIDATS AUX BOURSES D'ÉTUDES PRÉPARATOIRES A LA LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES;

PAR M. ED. GUILLET,

Maître répétiteur au lycée de Lyon.

Un point et une droite étant donnés, un cercle de rayon variable est tangent à la droite et passe par le point. Trouver le lieu des points du cercle pour lesquels la tangente est perpendiculaire à la droite donnée.

Je prends pour axe des y la droite Oy donnée, pour axe des x une perpendiculaire OA passant par le point fixe A.

En désignant par a la distance OA, par (α, β) les coordonnées variables du centre C du cercle, l'équation

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2 = 0 \tag{1}$$

représente l'un quelconque des cercles de la série, en tenant compte des deux conditions

$$r - \alpha = 0, \tag{2}$$

$$a^2 - 2\alpha a + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0. \tag{3}$$

Mais les points M, M′ du lieu sont à l'intersection du cercle et de la droite menée par le centre C parallèlement à Oy, droite dont l'équation est

$$x - \alpha = 0. \tag{4}$$

Il suffit d'éliminer α, β, r entre les quatre relations précédentes pour obtenir l'équation du lieu

$$y^4 - 2y^2(x^2 + 2ax - a^2) + (x-a)^4 = 0$$

ou

$$[(y-x)^2 - a(2x-a)][(y+x)^2 - a(2x-a)] = 0.$$

Le lieu cherché se compose donc de deux paraboles, symétriques par rapport à l'axe des x, tangentes à cet axe au point fixe donné, et ayant pour axes les deux droites

$$2(y-x) + a = 0,$$

$$2(y+x) - a = 0.$$

En remarquant que le centre C est toujours à égale distance du point fixe et de la droite donnée, le problème se ramène au suivant :

Trouver le lieu des points obtenus en augmentant et diminuant l'ordonnée de chaque point d'une parabole d'une quantité égale à la distance de ce point à la directrice.