Lionnet

Note sur les nombres parfaits

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 306-308

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__306_0>

NOTE SUR LES NOMBRES PARFAITS;

Par M. LIONNET.

I. La théorie des nombres parfaits, dont Euclide paraît s'être occupé le premier et dont il donne la définition suivante :

Un nombre entier est parfait lorsqu'il est égal à la somme de ses sous-multiples, ou, en d'autres termes, *de ses parties aliquotes entières,* ou, pour abréger, *de ses aliquotes,*

laisse encore beaucoup à désirer. La formule

$$(1) \qquad x = (2^n - 1)2^{n-1},$$

où n est un entier > 1 et $2^n - 1$ un nombre premier, donne pour x toutes les valeurs possibles des nombres parfaits pairs. On a, par exemple, pour

$$\begin{array}{llllll} n = 2, & 3, & 5, & 7, & 13, \\ x = 6, & 28, & 496, & 8128, & 33\,550\,336; \end{array}$$

mais on ignore s'il en existe une infinité.

Quant aux nombres parfaits impairs, on peut démontrer que, *s'il en existe,* ils sont donnés par la formule

$$(2) \qquad x = (4n + 1)^{4k+1} \times i^2,$$

où $4n + 1$ est un nombre premier impair > 1, k un entier $=$ ou > 0 et i un impair > 1 et premier à $4n + 1$.

II. Nous donnerons le nom de *nombres parfaits de* *première espèce* à ceux dont nous venons de parler (I), et celui de *nombre parfait de seconde espèce* à tout nombre *égal au produit de ses aliquotes.* Tels sont, par exemple,

$$8 = 1.2.4, \quad 10 = 1.2.5, \quad 14 = 1.2.7, \quad \ldots.$$

Pour obtenir tout nombre x ayant cette propriété, observons d'abord qu'il faut que l'on ait

$$(3) \qquad x = p^n$$

ou

$$(4) \qquad x = pp'P,$$

n étant un entier > 1, p et p' des nombres premiers inégaux et > 1, et P un entier $=$ ou > 1.

1° Pour qu'on ait

$$p^n = 1.p.p^2.p^3\ldots p^{n-1},$$

il faut et il suffit que

$$n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2},$$

ou que $n = 3$; donc

$$(5) \qquad x = p^3 = 1.p.p^2.$$

2° Si l'on avait $P > 1$, les nombres pP, $p'P$ seraient des aliquotes inégales de x, et dont le produit $pp'P^2$ excéderait x ; donc $P = 1$, et l'on a

$$(6) \qquad x = pp' = 1.p.p'.$$

Donc, en définitive (1° et 2°), *tous les nombres parfaits de seconde espèce sont les cubes* 8, 27, 125, ... *et les produits deux à deux* 6, 10, 15, ... *de tous les nombres premiers* 2, 3, 5, 7, 11, ... *supérieurs à l'unité.*

III. On est conduit à se demander s'il existe un ou plusieurs nombres *doublement parfaits,* c'est-à-dire *égaux à la somme et au produit de leurs aliquotes.* Pour le savoir, il suffit évidemment de chercher si, parmi les nombres parfaits de seconde espèce, qui sont tous donnés par les formules (5) et (6), il en est d'égaux à la somme de leurs aliquotes. Or on reconnaît immédiatement l'impossibilité de la relation

$$p^3 = 1 + p + p^2.$$

Quant à l'égalité

$$pp' = 1 + p + p',$$

elle exige que le plus grand des deux nombres premiers p, p', inégaux et supérieurs à l'unité, divise l'autre augmenté d'une unité, ce qui exige que p et p' soient consécutifs et, par suite, égaux aux nombres 2 et 3 ; donc on a

$$pp' = 6 = 1 + 2 + 3 = 1.2.3\,;$$

d'où il suit que 6 est le seul nombre positif doublement parfait.

Remarque. — Nous n'avons considéré jusqu'ici que des nombres parfaits positifs; mais il est bon d'observer qu'en changeant le signe d'un nombre parfait de première ou de seconde espèce, leurs aliquotes changent de signe en conservant, comme leur somme ou leur produit, la même valeur absolue, et que zéro est évidemment un nombre doublement parfait; d'où il suit que o, + 6 et — 6 sont les seuls nombres doublement parfaits.