NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ÉDOUARD LUCAS

Problème sur l'ellipsoïde

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 304-305

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__304_1>

PROBLÈME SUR L'ELLIPSOIDE;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Charlemagne.

Trouver le lieu des sommets des tétraèdres dont les hauteurs se rencontrent et dont les faces sont tangentes à l'ellipsoïde, aux points où ces faces sont rencontrées par les hauteurs.

Dans un remarquable Mémoire sur les normales aux coniques, M. Desboves a démontré que, si d'un point on abaisse six normales sur l'ellipsoïde, et si l'on désigne par (x, y, z) les coordonnées du pôle du plan passant par trois des pieds des normales, celles du pôle du plan passant par les trois autres sont respectivement $-\frac{a^2}{x}$, $-\frac{b^2}{y}$, $-\frac{c^2}{z}$.

Cela posé, désignons par (x_0, y_0, z_0) le pied de la normale situé sur le sommet du tétraèdre ayant pour coordonnées (x, y, z); on a

$$(1)\qquad \frac{a^2(x-x_0)}{x_0} = \frac{b^2(y-y_0)}{y_0} = \frac{c^2(z-z_0)}{z_0} = \lambda;$$

le point ayant pour coordonnées $-\frac{a^2}{x}, -\frac{b^2}{y}, -\frac{c^2}{z}$ se trouve nécessairement situé dans le plan tangent à l'ellipsoïde au point (x_0, y_0, z_0); on a donc

$$(2)\qquad \frac{x_0}{x} + \frac{y_0}{y} + \frac{z_0}{z} + 1 = 0.$$

Des équations (1) on tire linéairement x_0, y_0, z_0 et, en les portant dans l'équation (2) et celles de l'ellipsoïde, on obtient

$$(3)\qquad \frac{a^2}{a^2+\lambda} + \frac{b^2}{b^2+\lambda} + \frac{c^2}{c^2+\lambda} + 1 = 0,$$

et

$$(4)\qquad \frac{a^2x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{b^2y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{c^2z^2}{(c^2+\lambda)^2} = 1.$$

Donc le lieu des sommets des tétraèdres se compose de trois ellipsoïdes réels et concentriques à l'ellipsoïde proposé (*).

(*) Cette question a eté traitee d'une façon bien differente, et pour le plan seulement, par MM. Bourguet et Poujade (*Nouvelles Annales*, 2e serie, t. XIII, p. 576, et t. XVI, p. 186).

La methode précedente donne un grand nombre de conséquences analogues à celle que donne la solution du problème ci-dessus.