V. HIOUX

Note sur la méthode d'élimination Bezout-Cauchy

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 289-295

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__289_0>

NOTE SUR LA MÉTHODE D'ÉLIMINATION BEZOUT-CAUCHY;

PAR M. V. HIOUX,
Professeur au Lycee de Rennes.

Dans l'article si intéressant et si remarquable *Sur l'élimination*, de M. Rouché, publié dans les *Nouvelles Annales* de 1877, on rencontre l'identité fondamentale

$$V_p(x) = f(r)\, G_0(x) - g(x)\, F_0(x).$$

On sait que le programme du cours de Mathématiques spéciales recommande particulièrement l'emploi de la méthode d'élimination de Bezout, perfectionnée par Cauchy.

Je me propose d'établir par cette méthode, non-seulement l'identité précédente, mais encore les propriétés du résultant R que l'on démontre généralement au moyen des fonctions symétriques (*).

I. Considérons deux équations algébriques $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ de degrés m et n respectivement, n étant égal ou inférieur à m.

Si l'on pose

$$f_k(x) = a_{k+1} + a_{k+2}\, x + \ldots a_{k+\iota+1}\, x^\iota + \ldots + a_m\, x^{m-k-1},$$
$$g_k(x) = b_{k+1} + b_{k+1}\, x + \ldots b_{k+\iota+1}\, x^\iota + \ldots + b_m\, x^{m-k-1}.$$

(*) Voila dejà plusieurs années que, dans les conferences que je fais a Sainte-Barbe, j'expose la theorie de l'elimination et ses consequences, sans faire intervenir les fonctions symetriques. et en tenant compte des racines infinies.

Dans plusieurs conferences faites au lycee de Toulouse, au mois de juillet dernier, j'ai encore reproduit cette exposition. CH. B.

en supposant nuls les coefficients b_{m+1}, b_{n+1}, ..., b_m, si l'on a $n < m$, on peut écrire

$$f(x) = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k) + x^{k+1} f_k(x),$$
$$g(x) = (b_0 + b_1 x + \ldots + b_k x^k) + x^{k+1} g_k(x),$$

d'où l'on déduit l'identité

$$(k) \quad f(x) g_k(x) - g(x) f_k(x) = C_{k,0} + C_{k,1} x \ldots + C_{k,i} x^i + \ldots C_{k,m-1} x^{m-1}.$$

Cette identité, dans laquelle le coefficient de x^i est $C_{k,i}$, a lieu pour toutes les valeurs entières de k depuis o jusqu'à $m-1$, bien que les deux membres se réduisent à $-g(x) f_k(x)$ quand on donne à k les valeurs n, $n+1$, ..., $m-1$.

En égalant à zéro le second membre, polynôme entier en x du degré $m-1$, on a l'équation

$$(1) \quad C_{k,0} + C_{k,1} x + \ldots + C_{k,i} x^i + \ldots + C_{k,m-1} x^{m-1} = 0,$$

qui équivaut à m équations du premier degré en x, x^2, ..., x^{m-1}, lesquelles sont satisfaites pour toute valeur de x commune à $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$. Le déterminant R de ces m équations est le résultant donné par Cauchy dans son *Mémoire sur l'élimination*.

Désignons par R_p le mineur principal d'ordre p, obtenu en supprimant dans R les p premières lignes et les p premières colonnes; le premier élément de R_p est $C_{p,p}$.

Cela posé, donnons à k dans l'équation (1) les valeurs p, $p+1$, ..., $m-1$ et remplaçons dans R_p les éléments de la première colonne par les premiers membres des équations ainsi obtenues, arrêtés au terme en x^p, nous aurons sous forme de déterminant une fonction $V_p(x)$ de degré p et dans laquelle le coefficient de x^p est R_p.

La valeur du déterminant $V_p(x)$ ne sera pas changée si l'on ajoute aux éléments de la première colonne les éléments correspondants des colonnes suivantes multipliés respectivement par $x^{p+1}, \ldots, x^{m-1}$.

Dans le déterminant ainsi transformé, le premier élément de la première colonne est $f(x)g_p(x) - g(x)f_p(x)$; les suivants ont la même forme et le dernier est

$$f(x)g_{m-1}(x) - g(x)f_{m-1}(x).$$

Ce déterminant se décompose donc en deux autres et l'on a

$$(2) \qquad V_p(x) = f(x)G_p(x) - g(x)F_p(x).$$

Les polynômes $G_p(x)$, $F_p(x)$ se déduisent de R_p, en y remplaçant les éléments de la première colonne d'abord par $g_p(x), g_{p+1}(x), \ldots, g_{m-1}(x)$, puis par $f_p(x)$, $f_{p+1}(x), f_{p+2}(x), \ldots, f_{m-1}(x)$.

Le premier est du degré de $g_p(x)$, savoir $n - p - 1$; le second est du degré de $f_p(x)$, savoir $m - p - 1$.

Si l'on suppose $p = 0$, on a la deuxième identité

$$(3) \qquad R = f(x)G_0(x) - g(x)F_0(x).$$

II. Théorème. — *Le résultant* R *est un déterminant symétrique.*

En effet, on a d'une manière générale

$$(4) \quad C_{k,i} = (a_0, b_{k+i+1}) + (a_1, b_{k+i}) + \ldots + (a_{k-1}, b_{i+2}) \\ + (a_k, b_{i+1}) + (a_{k+1}, b_i) + \ldots + (a_i, b_{k+1}).$$

Mais, si l'on suppose $i > k$, les déterminants du second ordre qui suivent (a_k, b_{i+1}) forment une suite dans laquelle les déterminants également distants des extrêmes sont égaux et de signes contraires, le déterminant du milieu de la suite étant composé de deux colonnes identiques si leur nombre est impair; l'ensemble de ces déterminants est donc nul et l'on a $C_{k,i} = C_{i,k}$. C. Q. F. D.

Corollaire. — Si l'on suppose $i > k$, un élément situé à droite de la diagonale principale de R a pour expression

$$(5) \qquad C_{k,i} = (a_k, b_{i+1}) + C_{k-1,i+1}.$$

Les éléments d'une ligne placés à droite de la diagonale principale étant calculés par cette formule, on complètera le déterminant par symétrie.

Théorème de Bezout. — Si les équations proposées sont à deux variables x et y, on peut supposer que a_i, b_i sont des polynômes entiers en y, le premier du degré $m-i$, le second du degré $n-i$. Un élément $C_{k,i}$ de R a donc un degré égal à celui du produit $a_k b_{i+1}$, c'est-à-dire

$$m - k + n - i - 1$$

ou bien

$$(m + n - 1) - (k + i).$$

Or, un terme du développement de R est un produit de m éléments pris chacun à l'intersection d'une ligne et d'une colonne distinctes. Le degré de ce terme s'obtiendra donc en donnant à k, puis à i les valeurs 0, 1, 2, ..., $m-1$, et en répétant m fois la quantité $(m+n-1)$. Mais on a

$$2(0 + 1 + 2 \ldots + m - 1) = m(m-1).$$

Le degré cherché est donc

$$m(m + n - 1) - m(m - 1) = mn.$$

Donc : *Si entre deux équations entières $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$, la première du degré m, la seconde du degré n, on élimine l'inconnue x, l'équation finale en y est au plus du degré mn.*

Corollaire. — *Les deux équations proposées admettent en général mn solutions.*

En effet, soit $y = \beta$ une des mn racines de $R = 0$. Pour cette valeur de y, les équations $f(\beta, x) = 0$, $g(\beta, x) = 0$ ont une racine commune $x = \alpha$ qui vérifie les équations (1). Si l'on supprime la première de ces équations, on tire des autres *l'équation adjointe*

$$x = \frac{R'}{R_1},$$

dans laquelle on obtient R' à l'aide du premier mineur principal R_1, en remplaçant dans ce dernier les coefficients de l'inconnue x par les termes connus changés de signes. La valeur de x est ainsi le quotient de deux fonctions rationnelles de y. Comme on n'a pas en général $R_1 = 0$ pour $y = \beta$, on voit qu'à chacune des racines de $R = 0$ correspond une seule valeur de x; on ne trouve donc que mn couples de valeurs de x et y vérifiant les deux équations proposées.

Propriétés particulières de R.

I. *Le déterminant symétrique* R *est une fonction entière et homogène du degré* $2m$ *des coefficients a et b, dans laquelle la somme des indices de ces lettres dans un terme quelconque est constante et égale à mn.*

En effet, un élément quelconque $C_{k,i}$ de R est composé de déterminants du second ordre dont chacun est entier et du second degré en a et b. Le produit des m éléments qui forment un terme T de R est donc un polynôme entier en a et b du degré $2m$.

En outre, dans T, on a démontré que la somme des compléments à m des indices de a et des compléments à n des indices de b est égale à mn; il en est, par suite, de même de la somme des mêmes indices. Donc, etc.

II. *Le déterminant symétrique* R *est le produit par* *un facteur numérique d'une fonction entière des coefficients a et b qui renferme les premiers au degré n et les seconds au degré m.*

En effet, à partir de $k = n$ jusqu'à $k = m - 1$, substituons aux équations (1) celles qui proviennent de leurs derniers termes égalés à zéro, savoir :

$$- a_m x^{m-n-1} g(x) = 0, \quad - a_m x^{m-n-2} g(x) = 0, \quad \ldots, \quad - a_m x g(x) = 0, \quad - a_m g(x) = 0.$$

Le déterminant R sera ainsi remplacé par un autre dont on peut déduire R en ajoutant aux éléments d'une des $(m - n)$ dernières lignes les éléments des lignes suivantes multipliées par des facteurs constants. Ces deux déterminants sont donc égaux en valeur et l'on a

$$R = (- a_m)^{m-n} \Delta,$$

puisque, dans le deuxième déterminant, tous les éléments des $(m - n)$ dernières lignes sont multipliés par $- a_m$.

Le déterminant Δ provient du système (1), dans lequel les $(m - n)$ dernières équations se trouvent remplacées par

$$x^{m-n-1} g(x) = 0, \quad x^{m-n-2} g(x) = 0, \quad \ldots, \quad x g(x) = 0, \quad g(x) = 0.$$

Ce déterminant Δ renferme les a au premier degré dans n lignes seulement, et les b au premier degré dans m lignes, ce qui démontre la proposition II.

Remarque. — Puisque a_m est de degré 0 en y, l'équation finale $\Delta = 0$ est la même que $R = 0$. Dans la pratique, on remplace R par Δ. Le degré d'un terme T de Δ est $2m - (m - n) = m + n$, si l'on revient au cas de deux équations à une inconnue.

III. *Le résultant* R *est le produit par un facteur numérique des mn différences entre chacune des racines de* *l'une des équations et chacune des racines de l'autre.*

En effet, soit $x = \alpha$ une racine de la première équation, $x = \alpha'$ une racine de la seconde; la première est une certaine fonction des coefficients a et la deuxième une certaine fonction des coefficients b; or, pour $\alpha' = \alpha$, on a $R = 0$ et réciproquement. Donc R est divisible par $\alpha - \alpha'$; mais α désigne une quelconque des racines de la première équation et α' une quelconque des racines de la seconde. Donc, R est divisible par chacune des mn différences $\alpha - \alpha'$, $\alpha - \beta'$, ..., et, par conséquent, par leur produit, ce qui démontre la proposition III.

Si l'on a

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0, \quad g(x) = a'x^2 + b'x + c' = 0,$$

on trouve

$$R = (ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb'),$$

d'où

$$R = a^2 a'^2 (\alpha - \alpha')(\alpha - \beta')(\beta - \alpha')(\beta - \beta'),$$

les racines de la première équation étant α et β, et les racines de la seconde α' et β'.

Corollaire. — *Le résultant* R *d'une équation* $f(x) = 0$ *et de sa dérivée* $f'(x) = 0$ *est le produit d'un facteur numérique par le produit des carrés des différences des racines de* $f(x) = 0$.

Supposons, en effet, que l'on ait formé l'équation aux carrés des différences des racines de $f(x) = 0$, et soit V le dernier terme de cette équation, c'est-à-dire le produit des carrés des différences des racines de la proposée. Si l'on a $V = 0$, l'équation $f(x) = 0$ a une racine double, par suite $f(x) = 0$ et $f'(x) = 0$ ont une racine commune : donc R et V ne peuvent différer que par un facteur numérique.