ÉDOUARD GUILLET

Solution de la question proposée au concours d'admission à l'École normale en 1878

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 283-286

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__283_1>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1878;

Par M. Édouard GUILLET.

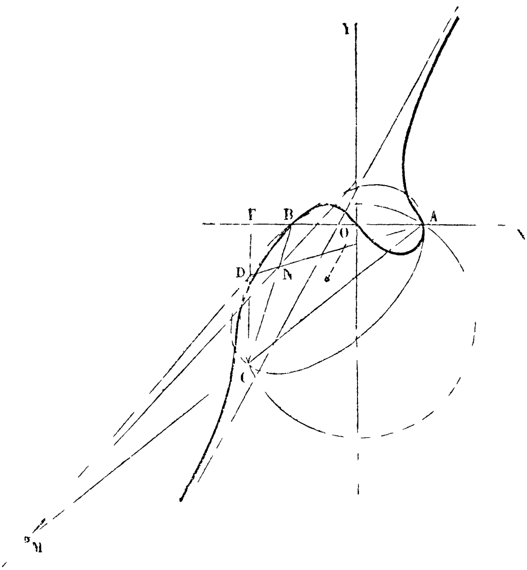
On donne une conique et deux points fixes A *et* B *sur cette courbe. Une circonférence quelconque passant par les deux points* A *et* B *rencontre la conique en deux autres points variables* C *et* D; *on mène les droites* AC, BD *qui se coupent en* M, *les droites* AD, BC *qui se coupent en* N. *Déterminer :*

1° *Le lieu des points* M *et* N;

2° *Le lieu des points de rencontre de la droite* MN *avec la circonférence à laquelle elle correspond.*

On construira les deux lieux.

Je prends AB pour axe des x, la perpendiculaire en



son milieu pour axe des y. Les équations de la conique fixe et du cercle variable passant par A et B sont

$$(1) \qquad x^2 + 2Pxy + Qy^2 + 2Ry - a^2 = 0,$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + 2R'y - a^2 = 0,$$

P, Q, R étant des constantes, R′ un paramètre variable et $2a$ la distance AB.

1° On obtiendra le lieu des points M et N en exprimant que la courbe qui passe par les quatre points d'intersection de la conique et du cercle est un système de deux droites, c'est-à-dire que le centre est sur la courbe.

Or l'équation d'une pareille courbe est

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1+\lambda)x^2 + 2Pxy + (Q+\lambda)y^2 \\ \quad + 2(R+R'\lambda)y - (1+\lambda)a^2 = 0 \end{array} \right.$$

et il suffira d'éliminer R′ et λ entre les deux équations du centre et la dérivée de (3) par rapport à une variable auxiliaire rendant homogène l'équation (3) :

$$(4)\quad \begin{cases} (1+\lambda)x + Py = 0, \\ Px + (Q+\lambda)y + (R+\lambda R') = 0, \\ (R+\lambda R')y - (1+\lambda)a^2 = 0, \end{cases}$$

ce qui conduit à l'équation de l'hyperbole équilatère

$$(5)\qquad P(x^2 - y^2) + (Q-1)xy - Pa^2 = 0.$$

Cette hyperbole a pour centre l'origine, milieu de AB, passe par les deux points A et B, et est indépendante de R.

2° Pour obtenir le lieu des points de rencontre de MN avec la circonférence correspondante, il suffit de remarquer que MN est la polaire par rapport à ce cercle du point E de rencontre des droites AB et CD.

Or l'équation de CD s'obtient en retranchant membre à membre les équations (1) et (2)

$$2Px + (Q-1)y + 2(R-R') = 0,$$

et le point E sur l'axe des x a pour abscisse

$$\frac{R'-R}{P}.$$

L'équation de MN est donc

$$(6)\qquad (R'-R)x + PR'y - Pa^2 = 0.$$

Éliminant R′ entre cette équation et celle du cercle, on a le lieu

$$(7)\quad (x^2+y^2)(x+Py) + 2Rxy - a^2(x-Py) = 0.$$

On voit que c'est une courbe du troisième degré passant par l'origine, par les points A et B et par les points circulaires de l'infini; elle est, de plus, indépendante du coefficient Q. Il n'y a qu'une asymptote réelle, parallèle à la droite

$$x + Py = 0,$$

c'est-à-dire parallèle au diamètre conjugué de AB dans la conique; l'ordonnée à l'origine d de cette asymptote est

$$d = \frac{2R}{1 + P^2}.$$

De plus la courbe coupe son asymptote et a trois points d'inflexion; la tangente à l'origine O est

$$x - Py = 0,$$

telle que AB est bissectrice entre elle et le diamètre conjugué de AB.

Enfin, si l'on transporte l'origine au point A, les termes constants disparaissent et ceux du premier degré se réduisent à

$$ax + (Pa + R)y$$

à la fois dans les équations de la conique et du lieu, ce qui indique que la courbe (7) est tangente à la conique au point A. Le même fait se produit en B.

Note. — Solutions analogues par MM. J. Griess, maître répétiteur au lycée d'Alger, et H. Mercereau, élève du lycée du Havre. M. Moret-Blanc a joint une solution géométrique à la solution analytique.