LAGUERRE

Sur la relation qui existe entre un cercle circonscrit à un quadrilatère et les éléments d'une conique inscrite dans ce quadrilatère

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 246-256

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__246_1>

SUR LA RELATION QUI EXISTE ENTRE UN CERCLE CIRCONSCRIT A UN QUADRILATÈRE ET LES ÉLÉMENTS D'UNE CONIQUE INSCRITE DANS CE QUADRILATÈRE;

PAR M. LAGUERRE.

1. Dans tout ce qui suit, pour abréger les démonstrations, je supposerai que l'on considère une conique et un cercle *réels* (ou du moins dont les équations soient

réelles). Les résultats obtenus s'étendent évidemment au cas où ces courbes seraient imaginaires; il suffirait d'ailleurs de quelques modifications légères pour appliquer au cas général les considérations sur lesquelles je m'appuie.

2. Je supposerai d'abord que la conique donnée soit une parabole P. En désignant par C le cercle donné, on sait, d'après Poncelet, que si l'on peut circonscrire à P un quadrilatère dont les sommets soient situés sur C, on peut lui circonscrire une infinité de quadrilatères jouissant de la même propriété. Le sommet d'un de ces quadrilatères peut être pris arbitrairement sur le cercle.

Soit I un des ombilics du plan, les deux tangentes menées de ce point à la parabole sont, d'une part la droite de l'infini qui rencontre le cercle à l'autre ombilic J, et d'autre part la droite FI qui passe par le foyer de la parabole. Les tangentes issues du point J sont la droite de l'infini et la droite FJ. Désignons respectivement par α et β les points où les droites isotropes FI et FJ rencontrent le cercle; il est clair que l'on obtiendra la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse inscrire dans le cercle un quadrilatère circonscrit à la parabole, en exprimant que la droite $\alpha\beta$ est tangente à P, ou bien que le symétrique de F relativement à cette droite est sur la directrice de P.

Ce point symétrique est évidemment le point réciproque de F relativement au cercle C; d'où la proposition suivante :

Étant donnés le cercle C *et une parabole* P, *si l'on peut inscrire dans le cercle un quadrilatère circonscrit à la parabole, le point réciproque du foyer de* P *relativement au cercle est situé sur la directrice de cette courbe.*

3. On sait (*) que, si l'on considère un quelconque des quadrilatères circonscrits à P et inscrits dans C, le point de rencontre Q des diagonales de ce quadrilatère est fixe et ne dépend pas de la position du quadrilatère considéré ; c'est d'ailleurs le point de rencontre de deux cordes communes aux deux courbes.

Si l'on considère, comme précédemment, le quadrilatère IJ$\alpha\beta$, on voit que le point fixe Q est l'intersection des droites isotropes βI et αJ ; *ce point est donc le réciproque de* F *relativement au cercle* C, *et il est situé sur la directrice.*

4. En particulier, si d'un point M, pris dans le plan de la parabole, on lui mène deux tangentes qui touchent cette courbe aux points A et B, on sait que l'on peut inscrire dans le cercle déterminé par les trois points M, A et B une infinité de quadrilatères circonscrits à P ; on peut donc, relativement à ce cercle, énoncer les propositions suivantes :

Le point réciproque du foyer de P, *relativement au cercle* C *circonscrit au triangle* MAB, *est sur la directrice de* P ; *il est le point d'intersection de la corde* AB *commune aux deux courbes, de la corde qui passe par leurs deux autres points de rencontre et de la tangente menée en* M *au cercle* C.

5. Considérons maintenant une conique K quelconque ayant pour foyers réels les points F et G ; je désignerai par $2a$ la longueur de l'axe contenant ces foyers, par $2b$ la longueur de l'autre axe, et par $2c$ la distance FG, en sorte qu'entre ces quantités on a, suivant la notation

(*) PONCELET, *Propriétés projectives*, t. I, p. 351.

habituelle, la relation

$$a^2 - b^2 = c^2.$$

Puisque l'on peut incrire dans le cercle C une infinité de quadrilatères circonscrits à la conique K, on peut choisir arbitrairement sur ce cercle le sommet d'un de ces quadrilatères. Prenons l'ombilic I; les tangentes menées de ce point à la conique passent par les foyers F et G et rencontrent respectivement le cercle en deux points α et β; en vertu de la propriété énoncée, il existe sur ce cercle un troisième point δ, tel que les droites $\alpha\delta$ et $\beta\delta$ sont tangentes à la conique K.

Déterminons d'abord le point symétrique de F relativement à $\alpha\delta$. Je mène à cet effet par le point F la droite isotrope du système (I) qui rencontre $\alpha\delta$ au point α, puis par le point α la droite isotrope du système J; je mène en second lieu par le point F la droite isotrope du système J qui rencontre $\alpha\delta$ en un point ε, puis par le point ε la droite isotrope du système I. Les droites αJ et εI se coupent en un point φ qui est le symétrique du point F.

Pour déterminer le segment représentatif de ce point imaginaire, je remarque que les points α, δ et ε sont en ligne droite. Le segment représentatif du point α est FF', si l'on désigne par F' le réciproque du foyer F relativement au cercle C; le segment représentatif du point φ a pour extrémité le point F' et pour origine un point R qu'il s'agit de déterminer. Quant au point δ, comme il se trouve sur le cercle C, il est représenté par un segment DD' dont les extrémités sont deux points réciproques relativement à ce cercle; le point ε a d'ailleurs pour segment représentatif RF.

Puisque les points α, δ et ε sont en ligne droite, les deux triangles FRD et F'FD' sont semblables et inversement placés, et, le quadrilatère $FF'DD'$ étant inscriptible, on voit immédiatement que le point R est le point de rencontre de $F'D$ avec la droite menée par le point F parallèlement à OD.

6. Semblablement, si l'on désigne par γ le symétrique de G relativement à $\beta\delta$ et par G' le réciproque de G relativement au cercle C, on voit que γ est représenté par le segment SG', en appelant S le point de rencontre de $G'D$ avec la droite menée par le point G parallèlement à OD.

Je ferai remarquer maintenant que, la droite $\alpha\delta$ étant tangente à la conique K, le point φ est situé sur le cercle réel décrit du point G comme centre avec un rayon égal à $2a$; donc :

1° La droite $F'D$ passe par le point G;

2° On a la relation

$$GR.GF' = 4a^2.$$

De même, la droite $\beta\delta$ étant tangente à la conique K, le point γ est situé sur le cercle réel décrit du point F comme centre avec un rayon égal à $2a$; donc :

1° La droite $G'D$ passe par le point F;

2° On a la relation

$$FS.FG' = 4a^2.$$

7. De là résulte que le point D est l'intersection des droites FG' et GF' et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Considérons un cercle* C *et une conique* K *jouissant de la propriété que l'on puisse inscrire dans le cercle un quadrilatère circonscrit à la conique; soient* O *le centre du cercle,* F' *et* G' *les points réciproques relativement au cercle des foyers* F *et* G *de* *la conique,* D *le point de rencontre des droites* FG′ *et* GF′.

Si l'on désigne par R *le point de rencontre* F′G *avec la droite menée par* O *parallèlement à* OD, *le produit* GR.GF′ *est égal au carré de l'axe de* K *qui contient les foyers* F *et* G.

8. On obtient ainsi la relation

$$\text{(1)}\qquad GR.GF' = 4a^2,$$

qu'il est aisé de transformer de façon à ne mettre en évidence que le rayon du cercle et les côtés du triangle OFG.

Soit en effet R le rayon du cercle, et posons, pour abréger,

$$OF = u, \quad OG = v, \quad \widehat{FOG} = \omega,$$

$$\widehat{OFG'} = \widehat{OGF'} = \alpha \quad \text{et} \quad \widehat{OF'G} = \widehat{OG'F} = \beta.$$

La relation (1) peut se mettre sous la forme suivante :

$$GF'(GD + DR) = 4a^2.$$

Or on a évidemment

$$GF' = \frac{OF'.\sin\omega}{\sin\alpha}, \quad GD = GG'.\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)},$$

et les deux triangles semblables OF′D et FF′R donnent

$$DR = OF\frac{DF'}{OF'} = \frac{OF}{OF'}\,\frac{FF'\sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

En remarquant que

$$OF' = \frac{R^2}{OF} = \frac{R^2}{u},$$

on déduit de là

$$4a^2 = \frac{R^2\sin\omega}{u\sin\alpha}\left(GG'\sin\beta + \frac{u^2}{R^2}FF'\sin\alpha\right)\frac{1}{\sin(\alpha - \beta)};$$

et comme

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OG}'} = \frac{uv}{\mathrm{R}^2},$$

$$4a^2 = \frac{\sin\omega}{\sin(\alpha - \beta)}(v.\mathrm{GG}' + u.\mathrm{FF}')$$
$$= \frac{\sin\omega}{\sin(\alpha - \beta)}\left[v\left(\frac{\mathrm{R}^2}{v} - v\right) + u\left(\frac{\mathrm{R}^2}{u} - u\right)\right]$$
$$= \frac{\sin\omega}{\sin(\alpha - \beta)}(2\mathrm{R}^2 - u^2 - v^2).$$

9. On trouve aisément

$$\frac{\sin\omega}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{\mathrm{R}^4 - 2\mathrm{R}^2 uv\cos\omega + u^2v^2}{\mathrm{R}^4 - u^2v^2};$$

on en déduit la relation

$$4a^2(\mathrm{R}^4 - u^2v^2) = (2\mathrm{R}^2 - u^2 - v^2)(\mathrm{R}^4 - 2\mathrm{R}^2 uv\cos\omega + u^2v^2).$$

On a d'ailleurs

$$4c^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\omega;$$

en éliminant $\cos\omega$ entre les deux équations qui précèdent, il viendra enfin

$$4a^2(\mathrm{R}^4 - u^2v^2) = (2\mathrm{R}^2 - u^2 - v^2)[(\mathrm{R}^2 - u^2)(\mathrm{R}^2 - v^2) + 4c^2\mathrm{R}^2].$$

10. Si l'on suppose que la conique se réduise à un cercle, les foyers F et G étant confondus, on devra faire $c = 0$, et en posant

$$u = v = \mathrm{D}, \quad a = r,$$

on obtiendra la relation suivante :

$$(\mathrm{R}^2 - \mathrm{D}^2)[2r^2(\mathrm{R}^2 + \mathrm{D}^2) - (\mathrm{R}^2 - \mathrm{D}^2)^2] = 0.$$

11. Comme je l'ai rappelé plus haut, si l'on considère un quadrilatère quelconque circonscrit à la co-

nique K et inscrit dans le cercle C, les diagonales de ce quadrilatère se coupent en un point fixe.

Pour déterminer ce point fixe, je considère en particulier le quadrilatère $I\alpha\delta\beta$; le point fixe cherché se trouve sur la droite δI, et, comme il est évidemment réel, il se confond avec le point D. On peut d'ailleurs facilement vérifier que ce point est sur la diagonale $\alpha\beta$; cela résulte immédiatement de la similitude des triangles FDG et F′DG′.

Ainsi :

Le point de rencontre fixe des diagonales des quadrilatères, circonscrits à la conique K *et au cercle* C, *est le point de rencontre des droites* FG′ *et* GF′.

12. Les considérations qui précèdent s'appliquent évidemment au cas où le polygone, que l'on peut circonscrire à la conique et inscrire dans le cercle, a un nombre de côtés supérieur à quatre ; mais les résultats deviennent alors beaucoup plus compliqués, et je me contenterai d'examiner le cas particulier où, la conique étant une parabole P, on peut lui circonscrire un pentagone inscrit dans un cercle C.

Si nous prenons pour sommet de ce pentagone l'ombilic I, des deux tangentes que l'on peut de ce point mener à la parabole, l'une est la droite de l'infini qui rencontre le cercle à l'ombilic J, l'autre coupe le cercle en un point α. Par l'ombilic J, on peut mener à P une tangente distincte de la droite de l'infini ; je désignerai par β le point où elle rencontre C. Cela posé, il est clair que si l'on peut inscrire dans le cercle un pentagone circonscrit à la parabole, les tangentes à ce cercle, menées par les points α et β (et distinctes des droites isotropes αI et βJ), doivent se couper en un point γ de ce cercle. D'ailleurs, les points α et β étant évidemment *imaginairement con-*

jugués, il en est de même de ces deux tangentes; *le point γ est donc réel.*

Nous devons maintenant exprimer que la droite $\alpha\gamma$ est tangente à la parabole.

A cet effet, je remarque que le point α est représenté par le segment FF′, si l'on appelle F le foyer de la parabole et F′ son réciproque relativement au cercle. Cherchons le symétrique de F relativement à la droite $\alpha\gamma$; pour cela, je considère la droite isotrope du système J qui passe par le point α, puis par le point F je mène la droite isotrope du même système qui rencontre $\alpha\gamma$ en un point ε; enfin par le point ε je mène la droite isotrope du système I.

Les droites αJ et εI se coupent en un point φ qui est le symétrique cherché, et le segment représentatif de φ est RF′, si l'on désigne par R le point réel situé sur la droite εI.

13. D'ailleurs, les points α, ε et γ étant en ligne droite, les deux triangles FF′γ et RFγ sont semblables, et par suite le point R est le point d'intersection de F′γ par la droite menée par F parallèlement à Oγ.

Si maintenant on remarque que le point φ, représenté par le segment RF′, est sur la directrice de la parabole, on en conclut d'autre part que R est le symétrique de F′ relativement à cette directrice.

D'où la proposition suivante :

Soit donnée une parabole à laquelle on peut circonscrire un pentagone inscrit dans le cercle; construisons le point F′, *réciproque par rapport au cercle, du foyer* F *de la parabole, puis le point* R *symétrique du point* F′ *par rapport à la directrice de cette parabole; cela posé, le point de rencontre de* F′R *avec la droite* *menée par le centre du cercle parallèlement à* FR *est situé sur le cercle.*

14. Si l'on désigne par γ ce point de rencontre, par O le centre du cercle et r son rayon, les deux triangles semblables FF′R et OF′γ donnent la proportion

$$\frac{O\gamma}{FR} = \frac{OF'}{OF'F};$$

et comme

$$OF' = \frac{r^2}{OF}, \quad \text{et} \quad O\gamma = r,$$

on en déduit la relation suivante :

$$r^2 - OF^2 = r.FR.$$

15. En terminant cette Note, je ferai encore remarquer avec quelle facilité les considérations dont j'ai fait usage conduisent au beau théorème de M. Faure, relativement aux triangles conjugués par rapport à une conique.

Considérons, en effet, un cercle circonscrit à un triangle conjugué relatif à une conique K ; on sait que l'on peut, dans ce cercle, inscrire une infinité d'autres triangles jouissant de la même propriété. Prenons l'ombilic I comme sommet d'un de ces triangles, et soient α et β les points de rencontre de K avec la polaire de cet ombilic ; ces points sont évidemment sur le cercle, lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique, en sorte que, en désignant par O le centre de K, et par a et b les demi-axes de cette conique, on a la relation

$$O\beta^2 = O\alpha^2 = a^2 + b^2.$$

Soient γ et δ les deux autres sommets du triangle conjugué dont le premier sommet est I ; par définition, les points γ et δ se trouvent sur la droite $\alpha\beta$ et divisent harmoniquement le segment $\alpha\beta$; on a donc

$$O\gamma . O\delta = O\alpha^2 = a^2 + b^2,$$

et, comme $O\gamma . O\delta$ est évidemment la puissance du centre O relativement au cercle C, le théorème est démontré.