Nouvelles annales de mathématiques

Laguerre

Sur la relation qui existe entre un cercle circonscrit à un triangle et les éléments d'une conique inscrite dans ce triangle

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 241-246

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__241_0>

SUR LA RELATION QUI EXISTE ENTRE UN CERCLE CIRCONSCRIT A UN TRIANGLE ET LES ÉLÉMENTS D'UNE CONIQUE INSCRITE DANS CE TRIANGLE;

PAR M. LAGUERRE.

1. Soit un triangle inscrit dans un cercle C et circonscrit à une conique K; si cette conique est une parabole, on sait que son foyer est sur le cercle.

Laissant ce cas de côté, j'énoncerai la proposition suivante :

Soient F *et* G *les deux foyers de la conique,* F' *le point réciproque du foyer* F *relativement au cercle et* O *le centre de ce cercle ; si, par le point* F, *on mène une droite parallèle à* OG, *cette droite rencontre* GF' *en un point* R *tel que le produit* $GR \times GF'$ *est égal au carré de l'axe qui renferme les deux foyers.*

2. Pour démontrer cette proposition, je remarque que l'on peut, d'après un théorème bien connu et dû à Poncelet, inscrire dans le cercle C une infinité de triangles circonscrits à la conique. En désignant par I et J les deux ombilics du plan, on sait que le cercle passe par ces deux points ; on peut donc construire un triangle inscrit dans le cercle circonscrit à K, et dont l'ombilic I soit l'un des sommets. A cet effet, je mène par les foyers F et G les droites isotropes FI et FJ qui sont tangentes à la conique ; ces droites rencontrent respectivement le cercle aux points m et n, et la droite mn est tangente à K.

3. Je rappellerai ici quelques notions très-simples que j'ai exposées dans une Note publiée précédemment dans les *Nouvelles Annales* (*). Un point quelconque A étant donné dans le plan, menons les deux droites isotropes AI et AJ qui se croisent en ce point, et désignons respectivement par a et par a' les points réels situés sur ces droites.

Il est clair que ces points sont parfaitement déterminés quand m se donne le point A ; réciproquement, ces points déterminent complétement le point A, et l'on peut dire que aa' est son segment représentatif, a étant l'origine du segment et a' en étant l'extrémité.

Ceci posé, *si trois points sont en ligne droite, les deux triangles formés respectivement, par les origines des segments représentatifs de ces points et leurs extrémités, sont semblables et inversement placés.*

En second lieu, *si un point imaginaire est situé sur un cercle réel, les extrémités de son segment représentatif sont réciproques par rapport à ce cercle.*

4. Il résulte de là que, si l'on désigne respectivement par F′ et G′ les points réciproques des foyers F et G relativement au cercle C, les points m et n ont respectivement pour segments représentatifs FF′ et GG′.

Je construis maintenant le point symétrique du point F relativement à la droite mn. A cet effet, par le point F, je mène la droite isotrope FI qui passe par le point m, puis par le point m la droite isotrope mJ qui contient le point réel F′ ; je mène ensuite la droite isotrope FJ, puis, en appelant p le point où elle rencontre la droite mn, la droite isotrope pI, et le point φ, où se rencon-

(*) *Sur l'emploi des imaginaires en Géométrie* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. IX ; 1870).

trent mJ et pI, est le point cherché. Si R est le point réel situé sur pI, on voit que son segment représentatif est RF'.

Pour obtenir le point R, je remarque que les trois points p, m et n étant en lignes droites et étant respectivement représentés par les segments RF, FF' et GG', les triangles RFG et $FF'G'$ sont semblables et inversement placés. D'où il suit que le point R est l'intersection de la droite GF' avec la droite menée par le point F parallèlement à GG'. Si l'on remarque en effet que le quadrilatère $FGF'G'$ est inscriptible dans un cercle, on en conclut sans peine que les angles $\widehat{FGR}$ et $\widehat{F'G'F}$ sont égaux comme inscrits dans un même arc de circonférence; par la même raison, l'angle $\widehat{F'FG'}$ est égal à l'angle $\widehat{F'GG}$ et ce dernier est égal par construction à l'angle $\widehat{FRG}$. Les angles $\widehat{FRG}$ et $\widehat{F'FG'}$ sont donc aussi égaux; par suite, les triangles RFG et $FF'G'$ sont semblables, et, comme ils sont évidemment inversement placés, le point R est le point réel situé sur la droite isotrope pI.

5. Le point φ étant symétrique de F relativement à la droite mn, qui est une tangente de la conique K, est situé sur le cercle décrit autour du foyer G comme centre avec un rayon égal à l'axe de la conique qui contient ce foyer.

Le point φ est d'ailleurs représenté par le segment RF'; on en conclut d'abord que la droite RF' passe par le point G, ce qui résulte de la construction même par laquelle on a déterminé le point R, puis que le produit $GR \times GF'$ est égal au carré de l'axe dont je viens de parler.

D'où la proposition que j'ai énoncée au commencement de cette Note.

6. Cette proposition peut s'énoncer d'une façon un peu différente.

Construisons le cercle passant par le point F′ *et tangent en* G *à la droite* OG ; *si l'on désigne par* Φ *le second point de rencontre de ce cercle avec l'axe* FG, *par* H *le centre de la conique, par* $2a$ *la longueur de l'axe de cette courbe qui renferme les foyers* F *et* G *et par* $2b$ *la longueur de l'autre axe, on a la relation*

$$\text{HF}.\text{H}\Phi = a^2 + b^2, \tag{1}$$

en sorte que les points F *et* Φ *sont réciproques relativement au cercle qui est le lieu des points d'où l'on voit la conique sous un angle droit.*

On peut remarquer, en effet, que, la droite FR étant parallèle à la droite OG, le quadrilatère FRF′Φ est inscriptible dans une circonférence de cercle; on a donc

$$\text{GF}.\text{G}\Phi = \text{GR}.\text{GF}' = 4a^2,$$

d'où, par une transformation facile, la relation énoncée ci-dessus.

7. Comme application, proposons-nous, étant donné un point O du plan, de construire un cercle ayant ce point pour centre et dans lequel on puisse inscrire un triangle circonscrit à la conique K.

Construisons le point Φ déterminé par la relation (1), et faisons passer par les points Φ et G un cercle qui touche la droite OG. Ce cercle rencontre la droite OF en deux points F′ et F″ ; de là deux solutions du problème proposé.

En premier lieu, on a comme solution le cercle relativement auquel les points F et F′ sont réciproques, et son rayon R′ est déterminé par la relation

$$R'^2 = OF.OF'.$$

On a comme seconde solution le cercle relativement auquel les points F et F″ sont réciproques, et son rayon R″ est déterminé par la relation

$$R''^2 = OF.O''.$$

8. En faisant le produit des équations précédentes, il vient

$$R'^2 R''^2 = \overline{OF}^2.OF'.OF''.$$

On a d'ailleurs, en vertu d'une propriété du cercle bien connue,

$$OF'.OF'' = OG^2;$$

d'où

$$R'R'' = OF.OG.$$

Ainsi, *le problème proposé a deux solutions et le produit des rayons des cercles qui y satisfont est égal au produit des distances du centre donné aux deux foyers de la conique.*

9. On peut transformer encore d'une autre façon la relation

$$GR \times GF' = 4a^2.$$

Les deux triangles semblables OF′G et FF′R donnent en effet

$$GR = OF \times \frac{GF'}{OF'},$$

d'où la relation

$$\frac{OF.GF'^2}{OF'} = 4a^2.$$

En désignant par R le rayon du cercle, par u et v les longueurs OF et OG et enfin par ω l'angle FOG, on a

$$\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OF}'} = \frac{u^2}{\mathrm{R}^2},$$

et

$$\mathrm{GF}'^2 = \mathrm{OG}^2 + \mathrm{OF}'^2 - 2\,\mathrm{OG}.\mathrm{OF}'\cos\omega = v^2 + \frac{\mathrm{R}^4}{u^2} - \frac{2\mathrm{R}^2 v\cos\omega}{u};$$

de là

$$(u^2v^2 + \mathrm{R}^4 - 2\mathrm{R}^2 uv\cos\omega) = 4a^2\mathrm{R}^2.$$

On a d'ailleurs, dans le triangle OFG,

$$4c^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\omega,$$

en désignant par $2c$ la distance des foyers F et G.

Éliminant $\cos\omega$ entre les équations précédentes, il vient

$$(\mathrm{R}^2 - u^2)(\mathrm{R}^2 - v^2) = 4b^2\mathrm{R}^2.$$

10. Si l'on suppose que, les foyers F et G venant à coïncider, la conique se réduise à un cercle, en posant

$$u = v = \mathrm{D} \quad \text{et} \quad b = r,$$

on obtiendra la relation suivante :

$$\mathrm{R}^2 - \mathrm{D}^2 = 2\mathrm{R}r,$$

qui, comme on le sait, est due à Euler.