CHARLES-ADOLPHE BOREL

Solution de la question proposée pour l'admission à l'École polytechnique en 1878

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 234-237

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__234_1>

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ECOLE POLYTECHNIQUE EN 1878

(voir 2e série, t. XVII, p. 461),

PAR M. CHARLES-ADOLPHE BOREL (*).

1° Soit $Ax^2 + Cy^2 = F$ l'équation d'une conique ayant ses axes dirigés suivant Ox et Oy.

L'équation d'une normale à cette conique au point (x_1, y_1) est

$$y - y_1 = \frac{Cy_1}{Ax_1}(x - x_1),$$

ou

$$\frac{C}{(C-A)x_1}x - \frac{A}{(C-A)y_1}y - 1 = 0.$$

En exprimant que cette normale coïncide avec la

(*) Cet élève a eu la note 20 et a été reçu le 158e.

droite D, dont l'équation est

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0,$$

j'ai les deux relations

$$(1) \qquad p = \frac{(C - A)x_1}{C}, \quad q = -\frac{(C - A)y_1}{A}.$$

Si je désigne par α, β les coordonnées du point M, pôle de la droite D par rapport à la conique, l'équation de cette droite D pourra encore se mettre sous la forme

$$A\alpha x + C\beta y - F = 0.$$

Si j'exprime que cette polaire coïncide avec la droite D, j'ai encore les deux relations

$$(2) \qquad p = \frac{F}{A\alpha}, \quad q = \frac{F}{C\beta}.$$

De ces équations (2) je tire les valeurs de A et de C et je les porte dans les relations (1); j'ai ainsi, en résolvant les équations (1) par rapport à x_1 et y_1,

$$x_1 = \frac{\alpha p^2}{\alpha p - \beta q}, \quad y_1 = -\frac{\beta q^2}{\alpha p - \beta q}.$$

En portant ces valeurs de A, C, x_1, y_1 dans l'équation

$$A x_1^2 + C y_1^2 - F = 0,$$

j'ai l'équation du lieu du point M

$$\frac{F}{p\alpha}\frac{\alpha^2 p^4}{(\alpha p - \beta q)^2} + \frac{F}{q\beta}\frac{\beta^2 q^4}{(\alpha p - \beta q)^2} - F = 0.$$

En simplifiant et en remplaçant α par x et β par y, j'ai l'équation

$$(px - qy)^2 - p^3x - q^3y = 0.$$

Le lieu du point M est donc une parabole.

Cette parabole passe par l'origine O et par les points de rencontre P et Q de la droite D avec les axes.

Elle doit passer, en effet, par le point O, car, parmi les coniques ayant leurs axes dirigés suivant Ox et Oy, il y a le système de droites dont l'une est perpendiculaire à D. Le pôle de D, par rapport à cette conique, est justement le point O.

Considérons maintenant le point P. Parmi les coniques normales à D, il en est qui ont leur sommet très-voisin du point P. Quand ce sommet se rapproche du point P, le point d'incidence de la normale se confond avec son second point de rencontre avec la conique, et le point M se confond aussi avec le point P. Donc le lieu passe par le point P. Le même raisonnement ferait voir que la parabole passe par le point Q.

L'axe de la parabole est parallèle à la droite

$$px - qy = 0;$$

il est donc perpendiculaire à D. D'ailleurs cet axe passe par le milieu du segment PQ.

L'axe est ainsi construit géométriquement.

2° Je vais démontrer que la distance du foyer de cette parabole au sommet est égale au quart de la distance du point O à la droite D.

Considérons, en effet, une parabole et un cercle décrit sur une corde perpendiculaire à l'axe comme diamètre et coupant la parabole.

L'équation de la parabole est $y^2 - 2px = 0$. L'équation du cercle est $(x - \alpha)^2 + y^2 - 2p\alpha = 0$. Le cercle coupe la parabole en deux autres points C et C' symétriques par rapport à Ox.

Les abscisses des points d'intersection sont données par l'équation

$$(x-\alpha)^2 + 2px - 2p\alpha = 0.$$

Cette équation admet la racine $x = \alpha$ qui correspond aux deux extrémités du diamètre. L'autre racine, $\alpha - 2p$, correspond aux points C et C'.

On a donc, pour la distance d'un des points C ou C' au diamètre perpendiculaire à l'axe, $\alpha - (\alpha - 2p) = 2p$.

La distance du foyer de la parabole au sommet, étant égale à $\frac{p}{2}$, est, par suite, égale au quart de cette distance.

Considérons alors la parabole lieu du point M. Cette parabole est circonscrite au triangle rectangle OPQ. De plus, son axe est perpendiculaire à PQ et passe par le milieu R de cette droite. Donc, d'après ce que je viens de démontrer, le paramètre de la parabole est égal à la moitié, et la distance du foyer au sommet est égale au quart de la distance du point O à la droite D.

3° Construire géométriquement l'axe et le sommet de la parabole revient à chercher le sommet d'une parabole passant par trois points O, P, Q et dont l'axe est connu.

On sait, en effet, que, la droite PQ étant perpendiculaire à l'axe, cet axe passe par le milieu R de PQ.

Pour construire le sommet, je prolonge OP jusqu'à sa rencontre en P' avec l'axe. Soit Q' le point où OQ coupe l'axe. Je prends le milieu de P'Q', et j'ai le sommet S.

J'en déduis la position du foyer F, car la distance SF est égale au quart de la distance du point O à la droite D et dirigée vers le point R.

Note. — Solutions analogues de MM. A. Guévara, ingénieur; J. Griess, maître répetiteur au lycée d'Alger; G. Lambiotte, elève de l'École polytechnique de Bruxelles; Robaglia; Gambey; Lez et Moret-Blanc.