NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. MALEYX

Comparaison de la méthode d'approximation de Newton à celle dite des parties proportionnelles

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 218-231

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__218_1>

COMPARAISON DE LA MÉTHODE D'APPROXIMATION DE NEWTON A CELLE DITE DES PARTIES PROPORTIONNELLES;

PAR M. L. MALEYX.

1. La méthode d'approximation de Newton est justement appréciée des personnes qui l'ont appliquée, pour

la rapidité avec laquelle elle permet d'approcher d'une racine séparée, quand elle se trouve comprise entre deux nombres assez voisins.

2. Je lui trouve même un autre avantage, en la modifiant d'après la forme donnée par Lagrange au reste de la série de Taylor : c'est de permettre de se rapprocher d'aussi près qu'on le voudra de la racine réelle d'une équation qui surpasse immédiatement un nombre donné, sans la dépasser. Cette propriété permet de fonder sur cette méthode d'approximation un procédé rigoureux de séparation, comme je l'ai établi dans une Note publiée chez Hachette en 1860.

3. Malgré cela, je crois que, sans augmentation de travail total, la méthode dite des parties proportionnelles, convenablement appliquée à l'approximation d'une racine séparée, donne un résultat plus approché que celle de Newton, et je me propose de l'établir.

4. Soit $F(x) = 0$ une équation dont le premier membre, ainsi que les première et seconde dérivées $F'(x)$, $F''(x)$, sont finis et continus entre les deux nombres a et b qui comprennent une seule racine, α, de $F(x) = 0$. Je ne fais aucune hypothèse sur les signes que peut prendre $F''(x)$ quand on y fait varier x de a à b, mais je supposerai qu'il n'existe pas de racine de $F'(x) = 0$ dans le même intervalle.

Désignons par h la différence positive ou négative $\alpha - a$, par $h'_1, h'_2, \ldots, h'_n$ les excès positifs ou négatifs de la racine α sur les valeurs approchées successives fournies par la méthode de Newton, et que nous représenterons par $a_1, a_2, \ldots, a_n$; par $h_1, h_2, \ldots, h_n$ les corrections successives fournies par la même méthode;

nous aurons les deux séries d'égalités

$$(1)\qquad \begin{cases} h = h_1 + h'_1, \\ h'_1 = h_2 + h'_2, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ h'_{n-1} = h_n + h'_n, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} h'_1 = -\dfrac{h^2 F''(a+\theta h)}{2F'(a)}, \\ h'_2 = -\dfrac{h'^2_1 F''(a_1+\theta_1 h'_1)}{2F'(a_1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ h'_n = -\dfrac{h'^2_{n-1} F''(a_{n-1}+\theta_{n-1} h'_{n-1})}{2F'(a_{n-1})}. \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre les égalités (1) et réduisant, on a

$$(3)\qquad h = h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n + h'_n;$$

$h_1, h_2, \dots, h_n$ sont connus, h'_n est inconnu et représente l'erreur.

Élevons les deux membres de chacune des égalités (2), à partir de la dernière, à des puissances dont les exposants soient respectivement 2^0, 2, 2^2, ..., 2^{n-1}; en désignant, pour abréger, $-\dfrac{F''(a_k+\theta_k h_k)}{2F'(a_k)}$ par M_k, nous aurons

$$(4)\qquad \begin{cases} h'^{2^{n-1}}_1 = h^{2^n} M^{2^{n-1}}, \\ h'^{2^{n-2}}_2 = h'^{2^{n-1}}_1 M_1^{2^{n-2}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ h'_n = h'^2_{n-1} M_{n-1}. \end{cases}$$

Multiplions maintenant les égalités (4) membre à membre, et supprimons les facteurs communs aux deux membres, nous en déduirons

$$(5)\qquad h'_n = h^{2^n} \times M^{2^{n-1}} \times M_1^{2^{n-2}} \times \dots \times M_{n-1}^{2^0}.$$

Désignons par μ un nombre inconnu, mais numériquement moindre que le plus grand des nombres M, M_1, ..., M_{n-1}, nous pourrons, en observant que

$$2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^0 = 2^n - 1,$$

poser

$$\pm \mu^{2\ -1} = M^{2^{n-1}} \times M_1^{2^{n-2}} \times \ldots \times M_{n-1}^{2^0},$$

et enfin

$$h' = \pm h^2 \times \mu^{2^n-1}, \quad \text{ou} \quad h_n = \pm h \times (h \times \mu)^{2^n-1},$$

le calcul ayant exigé $2 \times n$ substitutions, en comptant celles qui ont été faites dans $F(x)$ et dans $F'(x)$.

Il est évident qu'on ne peut approcher rapidement de la racine α que quand $h + \mu$ est numériquement moindre que 1, et qu'on s'en rapprochera d'autant plus vite que ce nombre sera plus petit.

Cette condition étant nécessaire pour la rapidité de l'approximation, même quand on fait sur les signes que peut prendre $F''(x)$ toutes les restrictions connues, il s'ensuit que ces restrictions sont généralement inutiles.

μ est un nombre inconnu compris entre la plus petite et la plus grande valeur que peut prendre le rapport $-\dfrac{F''(x_1)}{2F'(x_2)}$, x_1 et x_2 étant deux nombres compris entre a et b; ce rapport ne peut devenir infini, puisque nous avons supposé que $F'(x) = 0$ n'avait pas de racine entre a et b; de plus, il ne varie que dans des limites assez peu étendues, si $b - a$ est numériquement assez petit.

On peut former deux limites de mêmes signes ou de signes contraires entre lesquelles le nombre $F''(x_1)$ est compris, et deux limites de mêmes signes comprenant $F'(x_2)$; sachant du reste que h est numériquement inférieur à $(b - a)$, on pourra, en formant deux limites comprenant $h+\mu$, voir si la condition imposée à ce nombre d'être numériquement inférieure à 1 est remplie.

5. Passons maintenant à la méthode des parties proportionnelles; conservant les hypothèses faites dans le numéro précédent, posons les égalités

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=\frac{-F(a)}{\mu_1},$$
$$a'_1=a+\mu_1.$$
$$\frac{F(a)-F(a'_1)}{a-a'_1}=\frac{-F(a'_1)}{\mu_2},$$
$$a'_2=a'_1+\mu_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{F(a'_{p-1})-F(a'_p)}{a_{p-1}-a_p}=\frac{-F(a'_p)}{\mu_{p+1}},$$
$$a'_{p+1}=a'_p+\mu_{p+1}.$$

On en déduit, en ajoutant ces égalités de deux en deux à partir de la seconde,

$$a'_{p+1}=a+\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{p+1}.$$

Remplaçant dans cette dernière a par la quantité égale $\alpha-h$ et transposant, on a

$$h=\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_{p+1}+(\alpha-a'_{p+1}).$$

Posons encore

$$h=\mu_1+\mu'_1,$$
$$\mu'_1=\mu_2+\mu'_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\mu'_p=\mu_{p+1}+\mu'_{p+1},$$

on trouve par addition

$$h=\mu_1+\mu_2+\mu_3+\ldots+\mu_{p+1}+\mu'_{p+1};$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p+1}$ sont des nombres connus, μ'_{p+1} est l'erreur commise en acceptant a'_{p+1} comme valeur approchée de α.

6. De l'égalité

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=\frac{-F(a)}{\mu_1},$$

on tire

$$\mu_1=\frac{-(b-a)F(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{-(b-a)F(a)}{F[a+(b-a)]-F(a)},$$

ou, développant le dénominateur et réduisant,

$$\mu_1=\frac{-F(a)}{F'(a)+\frac{(b-a)}{2}F''[a+\lambda_1(b-a)]},$$

ou

$$\mu_1=-\frac{F(a)}{F'(a)}\left(1-\frac{(b-a)F''[a+\lambda_1(b-a)]}{2\left\{F'(a)+\frac{b-a}{2}F''[a+\lambda_1(b-a)]\right\}}\right);$$

mais on a aussi

$$h=-\frac{F(a)}{F'(a)}-\frac{h^2}{2}\,\frac{F''(a+\varepsilon h)}{F'(a)};$$

d'où, en éliminant $-\frac{F(a)}{F'(a)}$ entre les deux dernières égalités,

$$\mu_1=\left[h+\frac{h^2F''(a+\varepsilon h)}{2F'(a)}\right]$$
$$\times\left(1-\frac{(b-a)F''[a+\lambda_1(b-a)]}{2\left\{F'(a)+\frac{b-a}{2}F''[a+\lambda_1(b-a)]\right\}}\right),$$

qui peut se mettre sous la forme

$$h=\mu_1+\frac{h(b-a)F''[a+\lambda_1(b-a)]}{2\left\{F'(a)+\frac{b-a}{2}F''[a+\lambda_1(b-a)]\right\}}$$
$$-\frac{h^2F''(a+\varepsilon h)}{2F'(a)}\left(1-\frac{(b-a)F''[a+\lambda_1(b-a)]}{2\left\{F'(a)+\frac{b-a}{2}F''[a+\lambda_1(b-a)]\right\}}\right);$$

h est plus petit que $(b-a)$. Posons

$$h = \mu_1 + h(b-a)\text{N}_1.$$

Il résulte de la forme du second membre de l'égalité qui précède de deux rangs que, en général, N_1 ne diffère pas beaucoup de l'une des valeurs du rapport $\frac{\text{F}''(x_1)}{2\text{F}'(x_2)}$, x_1 et x_2 étant deux nombres compris entre a et b.

Si $(b-a)\times\text{N}_1$ est numériquement plus petit que l'unité, ce qui est la condition pour que la méthode de Newton s'applique avec succès, la différence $h-\mu_1$ ne sera qu'une fraction de h; elle ne sera même qu'une fraction de μ_1, si $(b-a)\text{N}_1$ est numériquement moindre que $\frac{1}{2}$.

En effet, on a l'égalité $\mu_1 = h[1-(b-a)\text{N}_1]$; d'après l'hypothèse, $1-(b-a)\text{N}_1$ ne peut varier qu'entre $\frac{3}{2}$ et $\frac{1}{2}$: donc μ_1 ne peut varier qu'entre $\frac{3}{2}h$ et $\frac{1}{2}h$; il est du signe de h et numériquement supérieur à $\frac{1}{2}h$; il en résulte que $h-\mu_1$, qui n'est qu'une fraction proprement dite de $\frac{1}{2}h$, le sera, *a fortiori*, de la quantité μ_1 numériquement supérieure

Si nous admettons qu'il en soit ainsi, le nombre μ'_1 défini au nº 5 sera numériquement moindre que h et que μ_1; de plus h et μ_1 seront de mêmes signes.

En répétant le même calcul, on en conclura que μ'_2 n'est qu'une fraction de μ'_1 et de μ_2, et qu'en général μ'_k n'est qu'une fraction de μ'_{k-1} et de μ_k.

De plus, on voit qu'en général chaque correction fournie par la méthode ne diffère de la correction vraie que du produit de cette correction vraie par la différence des deux valeurs approchées précédentes et par un nombre voisin de l'une des valeurs que peut prendre le rapport $\frac{F''(x_1)}{2F'(x_2)}$ précédemment défini. On pourra donc écrire les égalités

$$\begin{aligned} \mu'_1 &= h \times (b-a) \times N_1, \\ \mu'_2 &= \mu'_1 \mu_1 \times N_2, \\ &\dots\dots\dots\dots, \\ \mu'_{p+1} &= \mu'_p \mu_p \times N_{p+1}. \end{aligned}$$

Les deux nombres h et μ_1, et généralement μ'_{k-1} et μ_k n'ayant qu'une petite différence par rapport à eux-mêmes, on pourra, sans altérer sensiblement les coefficients N_2, N_3, ..., N_{p+1}, remplacer dans les égalités précédentes $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ respectivement par $h, \mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_{p-1}$; on aura ainsi

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \mu'_1 &= h \times (b-a) \times N_1, \\ \mu'_2 &= \mu'_1 \times h \times P_2, \\ \mu'_3 &= \mu'_2 \times \mu'_1 \times P_3, \\ \mu'_4 &= \mu'_3 \times \mu'_2 \times P_4, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu'_{p+1} &= \mu'_p \times \mu'_{p-1} \times P_{p+1}, \end{aligned} \right.$$

$P_2, P_3, \dots, P_{p+1}$ ne différant pas sensiblement de N_2, $N_3, \dots, N_{p+1}$ et étant, en conséquence, voisins chacun de l'une des valeurs que peut prendre le rapport $\frac{F''(x_1)}{2F'(x_2)}$.

8. Éliminons entre les équations (1) du n° 7 les inconnues $\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_p$.

Pour cela, écrivons la première, et au-dessous l'équation résultant de la multiplication membre à membre des deux premières

$$\begin{aligned} \mu'_1 &= h \times (b-a) \times N_1, \\ \mu'_2 &= h^2 \times (b-a) \times N_1 \times P_2; \end{aligned}$$

multiplions membre à membre les deux dernières et la troisième des équations (1) du n° 7, on a

$$\mu'_3 = h^3 \times (b-a)^2 \times N_1^2 \times P_2 \times P_3.$$

Généralement multiplions membre à membre les deux dernières équations obtenues et celle qui suit, dans les équations (1) du n° 7, la dernière sur laquelle on a opéré, on obtient successivement

$$\begin{aligned}
\mu'_4 &= h^5 \times (b-a)^3 N_1^3 \times P_2^2 \times P_3 \times P_4,\\
\mu'_5 &= h^8 \times (b-a)^5 N_1^5 \times P_2^3 \times P_3^2 \times P_4 \times P_5.
\end{aligned}$$

La loi de formation est évidente. Si nous posons

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1 & &= 1,\\
\lambda_2 &= \lambda_1 + 1 & &= 2,\\
\lambda_3 &= \lambda_2 + \lambda_1 & &= 3,\\
\lambda_4 &= \lambda_3 + \lambda_2 & &= 5,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\lambda_{p+1} &= \lambda_p + \lambda_{p-1} & &= 2p - 1,
\end{aligned}\right.$$

on aura

$$\mu'_{p+1} = h^{\lambda_{p+1}} \times (b-a)^{\lambda_p} \times N_1^{\lambda_p} \times P_2^{\lambda_{p-1}} \times P_3^{\lambda_{p-2}} \times \ldots \times P_p^{\lambda_1} \times P_{p+1}$$

ou, en désignant par π un nombre inconnu numériquement moindre que le plus grand des nombres N_1, P_2, P_3, ..., P_{p+1},

$$\mu'_{p+1} = h^{\lambda_{p+1}} \times (b-a)^{\lambda_p} \times \pi^{\lambda_{p-1}+\lambda_{p-2}+\lambda_{p-3}+\ldots+\lambda_2+\lambda_1+1};$$

or, en ajoutant les égalités (2) du n° 8, on a, après réduction,

$$\lambda_{p+1} = 1 + 1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{p-1},$$

d'où l'on déduit

$$\lambda_{p+1} + \lambda_p - 1 = 1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{p-1} + \lambda_p.$$

Donc

$$\mu'_{p+1} = \pm h \times (h \times \pi)^{\lambda_{p+1}-1} \times [(b-a) \times \pi]^{\lambda_p}.$$

9. Chaque correction obtenue par la méthode des parties proportionnelles n'exige qu'une substitution, à l'exception de la première qui en exige deux; d'où il résulte que, après avoir fait $2n$ substitutions, on sera parvenu à la correction de rang $2n - 1$. L'erreur commise sera alors

$$\mu'_{2n-1} = \pm h \times (h\pi)^{\lambda_{2n-1}-1} \times [(b-a) \times \pi]^{\lambda_{2n-1}}.$$

Celle que donne la méthode de Newton, après le même nombre de substitutions, est

$$h'_n = \pm h \times (h_\mu^{2^n-1}).$$

Or, si l'on admet que $h\pi$ et $h\mu$ soient à peu près égaux, et comme il est facile de vérifier que si $n \geq 3$, $\lambda_{2n-1} \geq 2^n$, on voit que μ'_{2n-1} est notablement moindre que h'_n.

La partie pénible de l'application de l'une ou l'autre méthode étant la substitution, on doit en conclure que l'avantage reste à la méthode des parties proportionnelles.

10. Je considère comme suffisamment établi, d'après ce qui précède, que la partie utile à retenir dans chaque correction peut se régler de la manière suivante : on formera d'abord un nombre qui ne puisse être numériquement inférieur au rapport $\frac{F''(x_1)}{2F'(x_2)}$, x_1 et x_2 étant deux nombres compris entre a et b, soit M ce nombre; pour la méthode de Newton on ne retiendra dans la valeur de h_p, supposé développé en décimales, que les unités dont la valeur n'est pas inférieure à une unité de l'ordre le plus élevé du produit $h_p^2 \times M$; pour la méthode des

parties proportionnelles, on ne retiendra dans la valeur de μ_p que les unités dont la valeur n'est pas inférieure à une unité de l'ordre le plus élevé du produit $\mu_p \times \mu_{p-1}$ M.

Du reste, dans l'un et l'autre cas on acceptera, à son choix, la valeur approchée par excès ou par défaut.

11. Dans ce qui précède, nous avons supposé remplies les conditions pour que la méthode de Newton puisse s'appliquer et donner une approximation assez rapide; mais la méthode des parties proportionnelles a sur elle un autre avantage, c'est celui de permettre de resserrer une racine séparée dans un intervalle plus étroit, sans aucune restriction relative à la dérivée première ou à la dérivée seconde; il suffit pour cela de l'appliquer à deux résultats de substitution de signes contraires.

Un seul inconvénient est attaché à ce procédé : il pourrait se faire que les valeurs approchées successives le fussent toutes dans le même sens, et qu'alors l'une des limites entre lesquelles la racine resterait comprise fût fixe. On peut alors y remédier en substituant, au lieu de la dernière valeur approchée trouvée, un nombre compris entre cette valeur et la limite qui reste fixe. On aura ainsi, ou une valeur approchée de même sens et plus approchée, ou une valeur approchée de sens contraire, et la limite qui restait fixe sera changée.

12. Pour terminer, nous allons donner les résultats de l'application des deux méthodes à un même exemple.

Soit l'équation

$$(1) \qquad e^x - x^e - \frac{\pi}{2} = 0;$$

e étant incommensurable, on ne peut attribuer aucun sens pareil à x^e dans la supposition où l'on donnerait à x

une valeur négative; nous ne nous occuperons donc que des racines positives.

D'après le théorème de Rolle, ces racines sont séparées par celles de

$$(2)\qquad e^x - e x^{e-1} = 0.$$

On voit facilement que l'équation (2) admet pour racines $x = 1$ et $x = e$, et elle n'en admet pas d'autres. En effet, d'après une Note que j'ai publiée dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. XI, p. 404), les racines de l'équation (2) sont séparées par celles de l'équation

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} & e^x - e x^{e-1} - [e^x - e(e-1)x^{e-2}] \\ & \qquad = -e \times x^{e-2}[x - (e-1)] = 0. \end{aligned} \right.$$

En substituant dans l'équation (2) les racines 0 et $(e - 1)$ de l'équation (3), on reconnaît qu'elle n'a que les deux racines trouvées.

Les racines de l'équation (1) sont donc séparées par les nombres de la suite

$$0, \quad 1, \quad e, \quad +\infty.$$

On reconnaît, en les substituant dans l'équation (1), qu'elle a et qu'elle n'a que trois racines réelles. Proposons-nous de calculer approximativement la racine comprise entre 1 et e. Au moyen de quelques substitutions réglées d'après la méthode des parties proportionnelles, on reconnaît que cette racine est comprise dans l'intervalle de 1,3 à 1,4.

Désignons par x_1 et x_2 deux nombres quelconques compris entre les mêmes limites, on a les inégalités

$$\begin{aligned} -1,189 < e^{1,3} - e(1,4)^{e-1} < F'(x_2) \\ < e^{1,4} - e(1,3)^{e-1} < -0,196, \\ -2,302 < e^{1,3} - e(e-1)(1,4)^{e-2} < F''(x_1) \\ < e^{1,4} - e(e-1)(1,3)^{e-2} < -1,580; \end{aligned}$$

d'où

$$M = \frac{F''(x_1)}{2F'(x_2)} < \frac{2,302}{2 \times 0,196} = \frac{2306}{392} < 6.$$

On reconnaît d'après ces inégalités que toutes les conditions désirables pour l'application de la méthode de Newton sont remplies pour la limite supérieure 1,4.

Appliquant cette méthode, on trouve successivement

$$\begin{aligned}
F(1,4) &= -\,0,011438,\\
F'(1,4) &= -\,0,79080,\\
h_1 &= -\,0,0144,\\
a_1 &= 1,3856;\\[4pt]
F(a_1) &= -\,0,000248058,\\
F'(a_1) &= -\,0,763448,\\
h_2 &= -\,0,00032491,\\
a_2 &= 1,38527509;\\[4pt]
F(a_2) &= -\,0,000000107000097935,\\
F'(a_2) &= -\,0,7628290790,\\
h_3 &= -\,0,00000014026861,\\
a_3 &= 1,3852749497313 9.
\end{aligned}$$

a_3 est la valeur approchée de la racine α, obtenue par la méthode de Newton au moyen de six substitutions.

Voyons maintenant ce que donne la méthode des approximations successives :

$$\begin{aligned}
F(1,3) &= 0,0580,\\
F(1,4) &= -\,0,0114,\\
\mu_1 &= 0,083,\\
a'_1 & 1,383;
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
F(a'_1) &= 0,0017304\\
\mu_2 &= 0,00223\\
a'_2 &= 1,38523
\end{aligned}\right\}\ \text{au moyen de } F(1,4);$$

$$\left.\begin{aligned} F(a'_2) &= 0{,}00003428702\\ \mu_3 &= 0{,}00004508\\ a'_3 &= 1{,}38527508\end{aligned}\right\}\text{au moyen de } F(a'_1);$$

$$\left.\begin{aligned} F(a'_3) &= -\,0{,}0000000993726 90\\ \mu_4 &= -\,0{,}000000130275\\ a'_4 &= 1{,}385274949725\end{aligned}\right\}\text{au moyen de } F(a'_2);$$

$$\left.\begin{aligned} F(a'_4) &= 0{,}00000000000485094023 7563\\ \mu_5 &= 0{,}0000000000063591454\\ a'_5 &= 1{,}3852749497313591454\end{aligned}\right\}\begin{array}{l}\text{au moyen}\\ \text{de } F(a'_3).\end{array}$$

a'_5 est la valeur approchée de α, obtenue par la méthode des parties proportionnelles au moyen de six substitutions.

Si l'on forme $F'(a'_4)$, on trouve

$$F'(a'_4) = -\,0{,}7628288115430$$

et, en appliquant la méthode de Newton à partir de a'_4, on trouve pour la correction

$$0{,}00000000000635914 6592.$$

On peut en conclure que a'_5 est approché à moins de $\frac{12}{10^{19}}$, tandis que a_3 ne l'est qu'à moins de $\frac{3}{10^{14}}$.

La méthode des parties proportionnelles a donc fait gagner entre quatre et cinq chiffres décimaux.

Nota. — Les calculs précédents ont été exécutés au moyen des excellentes Tables de logarithmes à vingt-sept décimales de Fédor Thoman.