NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H.-J. KRANTZ

Questions proposées par M. Bourguet

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 19-23

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__19_1>

QUESTIONS PROPOSEES PAR M. BOURGUET

(voir 2e série, t. XVI, p. 185);

SOLUTIONS DE M. H.-J. KRANTZ.

1° *Prouver que*

$$\mathrm{L}\,\frac{n+\frac{1}{2}}{m-\frac{1}{2}} > \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{n} > \mathrm{L}\,\frac{n+1}{m}$$

(L *désigne le logarithme népérien* $m \geqq 1$).

2° *Prouver que la série*

$$a^{\frac{1}{m}} + a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}} + a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}} + \ldots$$

est convergente pour $a < \frac{1}{e}$, *et divergente pour* $a \geqq \frac{1}{e}$.

3° *Prouver que la série*

$$\frac{m}{n} + \frac{m(m+1)}{n(n+1)} + \frac{m(m+1)(m+2)}{n(n+1)(n+2)} + \ldots$$

est convergente pour $n - m > 1$, *et divergente pour* $n - m \leqq 1$.

1° La fonction $\frac{1}{x}$ étant décroissante, on a évidemment

$$\frac{1}{m} > \int_{m}^{m+1} \frac{dx}{x}.$$

De plus, en considérant l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$, on voit sans difficulté que l'aire de cette courbe, comprise entre l'axe des x et les ordonnées qui sont aux distances $m - \frac{1}{2}$ et $m + \frac{1}{2}$ de l'origine, est plus grande que le rectangle qui a l'unité pour base et dont la hauteur est $\frac{1}{m}$, de sorte que l'on a

$$(1) \qquad \int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} > \frac{1}{m}.$$

On peut d'ailleurs établir directement cette inégalité de la manière suivante :

Pour toute valeur de $x < m$, on a numériquement

$$\frac{m}{m^2 - x^2} > \frac{1}{m} \quad \left(\text{pour } x = 0, \ \frac{m}{m^2 - x^2} = \frac{1}{m}\right);$$

donc aussi

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{m\,dx}{m^2 - x^2} > \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{m},$$

ou

$$\log \frac{m + \frac{1}{2}}{m - \frac{1}{2}} > \frac{1}{m},$$

ce qui revient à l'inégalité (1).

On peut donc établir

$$\int_{m-\frac{1}{2}}^{m+\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} > \frac{1}{m} > \int_m^{m+1} \frac{dx}{x}.$$

Remplaçant m successivement par $m+1$, $m+2$, jusqu'à n, on trouve, en ajoutant,

$$\int_{m-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} > \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{n} > \int_m^{n+1} \frac{dx}{x},$$

ou

$$\log \frac{n+\frac{1}{2}}{m-\frac{1}{2}} > \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{n} > \log \frac{n+1}{m}.$$

Remarque. — On voit par les calculs précédents qu'il est suffisant et nécessaire que m satisfasse à la condition

$$m \geq \frac{1}{2}.$$

2° Soit $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ une série ayant u_x pour terme general; on sait (par un théorème qui est, je crois, de *Raabe*) que cette série sera convergente, ou divergente, selon que l'une des expressions

$$x\left(\frac{u_x}{u_{x+1}} - 1\right), \quad \left[x\left(\frac{u_x}{u_{x+1}} - 1\right) - 1\right]\log x,$$
$$\left\{\left[x\left(\frac{u_x}{u_{x+1}} - 1\right) - 1\right]\log x\right\}\log\log x, \quad \ldots$$

approche d'une limite k, qui est plus grande ou plus petite que l'unité, x augmentant indéfiniment. Pour $k = 1$, il est douteux si la série sera, ou non, convergente.

La loi dela formation de ces expressions est évidente. En désignant par F_n et F_{n+1} deux de ces expressions successives, on a

$$F_{n+1} = n \log x (F_n - 1).$$

Le terme général de la série proposée est

$$u_x = a^{\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{m+x-1}};$$

donc

$$\frac{u_x}{u_{x+1}} = a^{-\frac{1}{m+x}}$$

et

$$x\left(\frac{u_x}{u_{x+1}} - 1\right) = \frac{a^{-\frac{1}{m+x}} - 1}{\frac{1}{x}}.$$

Cette expression prend la forme $\frac{0}{0}$ pour $x = \infty$; par les procédés ordinaires, on trouve, x augmentant indéfiniment,

$$\lim x\left(\frac{u_x}{u_{x+1}} - 1\right) = \log\frac{1}{a}.$$

La série est donc convergente, ou divergente, selon qu'on a

$$\log\frac{1}{a} > \text{ ou } < 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad a \lessgtr \frac{1}{e}.$$

Pour $a = \frac{1}{e}$, le cas reste douteux, et il faut prendre l'expression

$$\left[x\left(\frac{u_x}{u_{x+1}} - 1\right) - 1\right]\log x = \left[x\left(e^{\frac{1}{m+x}} - 1\right) - 1\right]\log x,$$

dont la valeur réelle pour $x = \infty$ est nulle, c'est-à-dire plus petite que l'unité; donc la série est divergente pour $a = \frac{1}{e}$.

3° Ici on a, pour le terme général,

$$u_x = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+x-1)}{n(n+1)(n+2)\ldots(n+x-1)};$$

donc

$$\frac{u_x}{u_{x+1}} = \frac{n+x}{m+x},$$

et, appliquant le même théorème que dans le cas précédent,

$$\lim x\left(\frac{u_x}{u_{x+1}}-1\right)=\lim\frac{x(n-m)}{m+x}=n-m.$$

Donc la série est convergente ou divergente selon que

$$n-m \gtrless 1.$$

Pour $n-m=1$, il faut prendre

$$\left[x\left(\frac{u_x}{u_{x+1}}-1\right)-1\right]\log x=-m\,\frac{\log x}{m+x},$$

dont la valeur réelle pour $x=\infty$ est nulle, ce qui prouve la divergence pour $n-m=1$.

Note. — M. Fauquembergue a envoyé une solution analogue de la troisième partie.