A. TOURRETTES

Solution de la question de licence proposée au concours d'agrégation de 1877

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 175-179
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__175_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE LICENCE

PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1877,

PAR M. A. TOURRETTES.

Étudier le mouvement des deux points pesants m et μ qui s'attirent proportionnellement à leur masse et à leur distance : le point μ est assujetti à rester sur une verticale O*z*, *et le point m à rester sur un plan horizontal qui tourne uniformément autour de la verticale* O*z*.

Considérons d'abord le mouvement du point m. En appelant k le coefficient de l'attraction, on trouve

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg - km\mu z$$

ou

$$\frac{d^2z}{dt^2} + k\mu\left(z + \frac{g}{k\mu}\right) = 0.$$

Posant

$$z' = z + \frac{g}{k\mu},$$

on trouve l'intégrale

$$z = -\frac{g}{k\mu} + \text{A}\cos t\sqrt{k\mu} + \beta\sin t\sqrt{k\mu}.$$

Pour déterminer les constantes, je suppose que, à l'origine du mouvement, $z = h$ et $\frac{dz}{dt} = 0$. On trouve ainsi

$$(1) \qquad z = -\frac{g}{k\mu} + \left(h + \frac{g}{k\mu}\right)\cos t\sqrt{k\mu}$$

et

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{hk\mu + g}{\sqrt{k\mu}}\sin t\sqrt{k\mu}.$$

La vitesse, d'abord négative, devient nulle pour $t = \frac{\pi}{\sqrt{k\mu}}$. Alors $z = h - \frac{2g}{k\mu}$.

Le mobile remonte ensuite à la hauteur h, et ainsi de suite indéfiniment. La durée d'une oscillation simple est $\frac{\pi}{\sqrt{k\mu}}$.

Je passe maintenant à l'étude du mouvement de μ. Soit OL une droite fixe dans le plan des xOy, et ωt l'angle de Ox avec cette droite. En tenant compte de l'attraction du point m, et appliquant le théorème de

Coriolis, j'ai l'équation

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} = - km\mu x + \mu\omega^2 x + 2\mu\omega \frac{dx}{dt};$$

le premier terme du second membre est la composante de l'attraction suivant Ox, le deuxième et le troisième sont les composantes de la force d'entraînement prise en sens contraire, et de la force centrifuge composée.

On aura de même

$$\mu \frac{d^2 y}{dt^2} = - km\mu y + \mu\omega^2 y - 2\mu\omega \frac{dx}{dt}.$$

En divisant par μ les deux équations, j'aurai à intégrer le système suivant :

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2 x}{dt^2} - 2\omega \frac{dy}{dt} - (\omega^2 - km)x = 0, \\ &\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\omega \frac{dx}{dt} - (\omega^2 - km)y = 0. \end{aligned} \right.$$

L'élimination de y conduit à l'équation

$$(3)\qquad \frac{d^4 x}{dt^4} + 2(\omega^2 + km)\frac{d^2 x}{dt^2} + (\omega^2 - km)^2 = 0.$$

Pour l'intégrer, je pose l'équation auxiliaire

$$\lambda^4 + 2(\omega^2 + km)\lambda^2 + (\omega^2 - km)^2 = 0,$$

dont les racines sont de la forme

$$\lambda = \pm a\sqrt{-1}, \quad \lambda = \pm b\sqrt{-1}.$$

Par suite, l'intégrale sera

$$(4)\qquad x = A\cos(at + \alpha) + B\cos(bt + \beta),$$

où A, α, B, β sont des constantes arbitraires.

De la deuxième des équations (2) je tire

$$2\omega(\omega^2 - km)y = 2\omega \frac{d^2y}{dt^2} + 4\omega^2 \frac{dx}{dt};$$

mais la première donne

$$\frac{d^3x}{dt^3} - 2\omega \frac{d^2y}{dt^2} - (\omega^2 - km)\frac{dx}{dt} = 0;$$

substituant dans la précédente la valeur de $2\omega \frac{d^2y}{dt^2}$, il vient

$$2\omega(\omega^2 - km)y = \frac{d^3x}{dt^3} + (3\omega^2 + km)\frac{dx}{dt};$$

il n'y a plus qu'à former $\frac{d^3x}{dt^3}$, $\frac{dx}{dt}$ au moyen de (4). On aura donc

$$(5) \qquad y = A_1 \cos(at + \alpha_1) + B_1 \cos(bt + \beta_1),$$

où $A_1, \alpha_1, B_1, \beta_1$ sont des constantes, fonctions de celles qui entrent dans l'équation (4), ainsi que de ω, k, m, a, b; de sorte qu'il n'y a en réalité que quatre constantes arbitraires : A, α, B, β. On les déterminera au moyen de la position et de la vitesse initiales du point μ.

Les équations (4) et (5) représentent la trajectoire relative du point μ.

Cette courbe n'a pas de branches infinies; mais on peut se demander si le mouvement est périodique. Il faut que, si l'on obtient le point M pour $t = t_0$, on obtienne ce même point pour $t = t_1$. Or cela exige que

$$at_0 - \alpha - (at_1 - \alpha) = 2n\pi,$$
$$bt_0 + \beta - (bt_1 + \beta) = 2n'\pi,$$

d'où

$$t_1 - t_0 = \frac{2n\pi}{a} = \frac{2n'\pi}{b},$$

ou bien

$$\frac{n}{a} = \frac{n'}{b}.$$

En donnant à n et n' des valeurs de la forme $a\delta$, $b\delta$, où δ est arbitraire, on satisfera à cette condition. Mais il faut, en outre, que $a\delta$, $b\delta$ soient entiers. S'il en est ainsi, ce mouvement sera périodique, et la période sera

$$\frac{2n\pi}{a}.$$