Nouvelles annales de mathématiques

A. Tourrettes

Solution de la question de mécanique élémentaire proposée au concours d'agrégation de 1877

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 173-175

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__173_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE

PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1877;

PAR M. A. TOURRETTES.

Deux poids P *et* P' *sont assujettis à se mouvoir sur deux plans inclinés dont l'intersection est horizontale; ces deux poids s'attirent proportionnellement à leurs masses et à une puissance connue* k *de leur distance mutuelle : trouver leur position d'équilibre (on négligera les dimensions des deux poids).*

Étudier le même problème en tenant compte du frottement que l'on suppose le même pour les deux plans inclinés.

Il est d'abord évident que les points A et B sont dans un même plan perpendiculaire à l'intersection des deux plans inclinés; car la direction AB de l'attraction doit être dans le plan vertical contenant la normale en A et aussi dans le plan vertical contenant la normale en B; par conséquent, ces deux plans verticaux se confondent. Considérons la section ACB, et soient α, β les inclinaisons des deux plans sur l'horizon, m, m' les masses, δ la distance AB, μ la constante de l'attraction et θ l'inclinaison de AB sur l'horizontale du point A, dans la position d'équilibre des deux points.

Les forces qui agissent sur le système sont les poids mg, $m'g'$ et leur attraction mutuelle $\mu mm'\delta^k$. J'exprime que chaque point est en équilibre sous l'action des forces qui le sollicitent :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} g\sin\alpha &= \mu m'\delta^k\cos(\alpha-\theta),\\ g\sin\beta &= -\mu m\delta^k\cos(\beta+\theta),\end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = -\frac{m'}{m}\,\frac{\cos(\alpha-\theta)}{\cos(\beta+\theta)}$$

et

$$\tang\theta = \frac{m\sin\alpha\cos\beta - m'\sin\beta\cos\alpha}{(m+m')\sin\alpha\sin\beta}.$$

Connaissant θ, l'une des équations (1) donnera δ^k, et par suite δ. La première partie est résolue.

Maintenant tenons compte du frottement. On sait que le frottement est proportionnel à la pression normale, et à un coefficient f, qui est ici le même pour les deux plans. La force de frottement agissant sur A sera $fmg\cos\alpha$; celle qui agit sur B sera de même $fm'g\cos\beta$. Comme ces forces exercent leur action en sens inverse du mouvement qui tend à se produire, nous aurons les deux équations d'équilibre

$$\begin{aligned} g(\sin\alpha - f\cos\alpha) &= \mu m'\delta^k\cos(\alpha-\theta),\\ g(\sin\beta - f\cos\beta) &= -\mu m\delta^k\cos(\beta+\theta),\end{aligned}$$

et, si l'on pose $f = \tang\varphi$, il vient

$$(2) \qquad \begin{cases} g\sin(\alpha - \varphi) = \mu\cos\varphi\, m'\delta^k\cos(\alpha - \theta), \\ g\sin(\beta - \varphi) = \mu\cos\varphi\, m\,\delta^k\cos(\beta + \theta), \end{cases}$$

d'où

$$\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\beta - \varphi)} = \frac{m'}{m}\,\frac{\cos(\alpha - \theta)}{\cos(\beta + \theta)},$$

et, en posant $\alpha - \varphi = \alpha'$, $\beta - \varphi = \beta'$, on trouve

$$\tang\theta = \frac{m\sin\alpha'\cos\beta' - m'\sin\beta'\cos\alpha'}{(m + m')\sin\alpha'\sin\beta'}.$$

C'est la même formule que dans le premier cas, seulement les plans ont été inclinés de l'angle φ, qui est l'angle du frottement.

Connaissant θ, on n'aura qu'à substituer dans l'une des formules (2) pour avoir δ^k. On déduira, du reste, cette valeur de celle trouvée dans la première partie en remplaçant α, β, μ par α', β' et $\mu\cos\varphi$.