L. Bourguet

Solution de la question de mathématiques spéciales, proposée au concours d'agrégation de 1877

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 170-172
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__170_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1877 (*);

PAR M. L. BOURGUET.

On donne un ellipsoïde et un point A :

1° *Trouver un point* B *tel que, en menant par ce point un plan quelconque* P, *la droite* AB *soit toujours l'un des axes du cône qui a pour sommet le point* A *et pour base la section de l'ellipsoïde par le plan* P;

(*) Cette question se trouve, aux termes près, dans l'*Aperçu historique*, p. 287. CH. B.

2° *Le problème a en général trois solutions : trouver pour quelles positions du point* A *le nombre des solutions devient infini;*

3° *Le point* A *restant fixe, on suppose que l'ellipsoïde se déforme de façon que les trois sections principales conservent les mêmes foyers, et l'on demande le lieu que décrit alors le point* B.

Soit CD une corde de la surface passant par B. Le conjugué B' de B, par rapport à C, D, est sur la bissectrice extérieure de l'angle CAD, perpendiculaire à AB. Donc le plan polaire de B passe par A et est perpendiculaire à AB Cette propriété va nous permettre de déterminer B. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées de ce dernier point, α, β, γ celles de A. Le plan polaire de B est

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} + \frac{z_1 z}{c^2} - 1 = 0.$$

La condition que ce plan passe par A et soit perpendiculaire à AB donne

$$\frac{x_1 \alpha}{a^2} + \frac{y_1 \beta}{b^2} + \frac{z_1 \gamma}{c^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{x_1 - \alpha}{\dfrac{x_1}{a^2}} = \frac{y_1 - \beta}{\dfrac{y_1}{b^2}} = \frac{z_1 - \gamma}{\dfrac{z_1}{c^2}} = \lambda.$$

On voit d'abord que B se trouve dans le plan polaire de A. Les deux plans suivant lesquels se coupent les deux surfaces passent par B. Le plan représenté par la première équation coupe les cylindres représentés par les autres, suivant deux coniques ayant une asymptote parallèle, se coupant par conséquent en trois points. Donc à A correspondent en général trois points B.

On tire de ces équations

$$\frac{x_1}{a^2} = \frac{\alpha}{a^2 - \lambda}, \quad \frac{y_1}{b^2} = \frac{\beta}{b^2 - \lambda}, \quad \frac{z_1}{c^2} = \frac{\gamma}{c^2 - \lambda},$$

$$\frac{\alpha^2}{a^2 - \lambda} + \frac{\beta^2}{b^2 - \lambda} + \frac{\gamma^2}{c^2 - \lambda} - 1 = 0.$$

Ceci prouve que, si par le point A on fait passer trois surfaces, ayant leurs sections principales homofocales avec les sections principales de la surface donnée, les trois droites AB sont les normales à ces trois surfaces. Les trois droites AB forment donc un angle trirectangle.

Si la surface se déforme de telle sorte que les foyers des sections principales restent fixes, on voit que le point B décrira les trois normales aux surfaces dont nous avons parlé.

λ est complétement déterminé quel que soit A; pour que B devienne indéterminé, il faut donc qu'on ait, par exemple, $a^2 - \lambda = 0$, $\alpha = 0$; alors le lieu du point B est une parallèle à l'axe OX, passant par A.

Note. — Autres solutions de MM. Durranton, Tourrettes et Gambey.