NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 140-143

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__140_1>

BIBLIOGRAPHIE.

I. Mémoire sur l'élimination, par M. *H. Lemonnier*, docteur ès sciences, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Henri IV. Paris, Gauthier-Villars; 1879.

Dans les séances du 11 et du 25 janvier 1875, M. Bertrand a bien voulu communiquer à l'Académie les principaux résultats d'un travail que j'ai l'honneur de soumettre aujourd'hui (26 juillet, même année) à son appréciation.

Ce Mémoire, annoncé par M. le Secrétaire perpétuel, dans la séance du 25 janvier, est divisé en trois Parties.

La première a pour objet de mettre en évidence l'intime liaison qui unit, au point de vue analytique, les méthodes d'élimination connues sous les noms d'Euler, de Sylvester, de Cayley, de Bezout, de Cauchy. J'en ai déduit l'expression et la formation, par des déterminants, des conditions suffisantes et requises pour que deux équations entières en x,

$$F(x) = Ax^m + \ldots + A_m, \quad f(x) = ax^n + \ldots + a_n,$$

aient p racines communes, ainsi que de l'équation propre à donner ces racines, ou du plus grand commun diviseur de $F(x)$ et $f(x)$.

La deuxième Partie consiste dans l'étude des polynômes qu'il convient de former de proche en proche pour obtenir ces conditions, et l'équation aux racines communes. L'application en est immédiate au théorème de Sturm. Les polynômes qui proviennent d'une fonction entière et de sa dérivée sont des fonctions équivalentes aux fonctions de Sturm proprement dites. Les premiers termes, les derniers, tels termes qu'on veut, peuvent se calculer à part. Le procédé de calcul nous paraît d'une grande sûreté et d'une simplicité qui pourra contribuer à donner un intérêt pratique au théorème de l'illustre Genevois.

Dans la troisième Partie, les mêmes considérations sont appliquées à la résolution de deux équations entières en x et y,

$$\Phi(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0.$$

Les solutions du système s'obtiennent sans omission et directement, sans calculs qui portent à faux, avec l'avantage, si les deux polynômes ont un plus grand commun diviseur dépendant de x et de y, de le faire trouver en même temps que l'équation finale due à sa suppression.

Ajoutons que les systèmes particuliers auxquels conduit la méthode de M. Labatie s'obtiennent également par l'application de notre procédé, de sorte que l'équation finale peut être débarrassée des racines qui y figurent. Mais la méthode de M. Labatie, par la succession même des divisions, donne lieu à une complication qui ressort des liaisons qui unissent nos polynômes, comme du rapprochement que nous faisons entre les deux procédés.

Il n'est question, du reste, dans ce travail, que de racines communes ayant des modules finis, et de solutions communes pour lesquelles les inconnues ont des valeurs finies, déterminées.

Introduction. — Objet du Mémoire, sa division en trois Parties.

Première Partie. — I. Nos 1, 2. Sur l'identité d'Euler au cas d'une racine commune et au cas de p racines communes.

II. Nos 3, 4, 5, 6. Équivalence du procédé de Sylvester et de celui d'Euler pour une racine commune. La nullité du déterminant qu'ils donnent, d'ordre $m+n$, et le fait qu'un autre déterminant d'ordre $m+n-2$ constitue ce qui est nécessaire et suffisant pour l'existence d'une seule racine commune.

III. Nos 7-15. On établit comme conditions nécessaires et suffisantes de l'existence de p racines communes le fait qu'un déterminant défini d'ordre $m+n-2p$ soit différent de zéro et que p déterminants d'ordre $m+n-2p+2$, également fixés, soient nuls séparément. — Mode particulier de formation de l'équation aux racines communes, du plus grand commun diviseur de degré p.

IV. Nos 15-18. Équations de Bézout, équations de Cauchy au cas d'une racine commune; leur équivalence à celles de Sylvester. Autre forme que précédemment pour les conditions nécessaires et suffisantes au cas d'une seule racine commune.

N^{os} 19, 20, 21. Les conditions établies au paragraphe précédent sont présentées sous une forme différente : d'une part p déterminants d'ordre $m-p+1$ s'égalant à zéro, et d'autre part un déterminant d'ordre $m-p$, différent de zéro. — Nullité qui s'ensuit de déterminants d'ordre supérieur jusqu'à celui de Sylvester.

Deuxième Partie. — I. N^{os} 22, 23, 24. Calcul des polynômes R_{n-p} qui, d'après la règle du n° 14, sont les plus grands communs diviseurs pour $p=n-1$, $n-2$, $n-3$, ... Le polynôme R_{n-p} divise les précédents, s'il y a p racines communes ; le fait que son premier coefficient ne soit pas nul, et la nullité des coefficients de R_{n-p+1} sont les conditions pour avoir p racines communes, et dès lors les polynômes d'indice plus élevé sont tous nuls.

N^{os} 25, 26. Les polynômes R sont, à des facteurs près indépendants de x, les diviseurs consecutifs que donne le procédé de la division dans la recherche du plus grand commun diviseur.

N^{os} 27, 28. Relations entre les polynômes R :

$$a^{m-n+1}\,\mathrm{F}(x) = f(x).\mathrm{Q} + \mathrm{R}_1(-1)^{\frac{m-n}{2} \text{ ou } \frac{m-n+1}{2}},$$

$$\alpha_1^2 f(x) = \mathrm{R}_1\mathrm{Q}_1 - a^{m-n+1}\mathrm{R}_2(-1)^{\frac{m-n-1}{2} \text{ ou } \frac{m-n}{2}},$$

$$\alpha_2^2\mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_1\mathrm{Q}_2 - \alpha_1^2\mathrm{R}_3,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\alpha_{p-1}^2\mathrm{R}_p = \mathrm{R}_{p+1}\mathrm{Q}_{p+1} - \alpha_p^2\mathrm{R}_{p+1}.$$

N^{os} 29, 30. Sur les polynômes R_p, quand leurs degrés ne sont pas consecutifs.

N° 31. Sur les polynômes déduits de R_p et R_{p+1} en les traitant comme $\mathrm{F}(x)$ et $f(x)$.

N^{os} 32-35. Remarques diverses.

II. N^{os} 36, 37. Autre mode de formation de polynômes R_p, pour lesquels on a

$$R_{2k+1} = (-1)^{m-n+1}\,\mathrm{R}_{2k+1},$$

$$R_{2k} = \mathrm{R}_{2k},$$

$$a^{m-n+1}\,\mathrm{F}(x) = f(x).\mathrm{Q} - R_1(-1)^{\frac{m-n}{2}},$$

$$\alpha_1^2 f(x) = R_1(-\mathrm{Q}_1) - \mathrm{Q}^{m-n+1}R_2(-1)^{\frac{m-n-1}{2}},$$

$$\alpha_{p+1}^2 R_p = R_{p+1}(+\mathrm{Q}_{p+1}) - \alpha_p^2 R_{p+2}.$$

N° 38. Cas particulier de $m=n$.

III. N° 39. Application au théorème de Sturm.

N° 40. Les premiers coefficients des polynômes R_1, R_2 sont les nombres p_μ de M. Borchardt.

N° 41. **Exemples divers.** — Abaissement d'une unité dans l'ordre des **déterminants**, en opérant par $f(x) = \varphi(x, y)$, par $\varphi'_x(x, y)$ et $\varphi'_x(x, y)$.

TROISIÈME PARTIE. — I. Application à la résolution des équations entières en x et y. — Règle à suivre.

II. Évaluation du degré maximum de y dans les coefficients des polynômes en R ou R_p.

III. Comparaison entre ce procédé et celui de M. Labatie.

IV. Exemples divers.

2. MÉMOIRE SUR LA TRANSFORMATION DES FORMES LINÉAIRES DES NOMBRES PREMIERS EN FORMES QUADRATIQUES, par *G. Oltramare,* professeur à l'Université de Genève.

3. DEUX LETTRES INÉDITES de *Joseph-Louis Lagrange,* tirées de la Bibliothèque royale de Berlin. (Collection Meusebach, portefeuille n° 21, et collection Radowitz, n° 4952), et publiées par *B. Boncompagni.* Berlin, imprimerie de *Gustav Schade* (Otto Francke); 1878.