NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. COURBE

Questions de licence (1877) (faculté de Paris)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 123-126

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__123_0>

QUESTIONS DE LICENCE (1877)

(FACULTÉ DE PARIS);

PAR M. H. COURBE.

---

1. *Trouver les trajectoires orthogonales des courbes représentées en coordonnées polaires par l'équation*

(1) $$\rho^2 = a^2 \log \frac{\tang \omega}{c},$$

dans laquelle c est un paramètre variable.

En employant les coordonnées rectangulaires

$$x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega, \quad \frac{y}{x} = \tang \omega,$$

on met l'équation (1) sous la forme

(2) $$x^2 + y^2 - a^2 \log \frac{y}{cx} = 0,$$

ou

$$f(x, y) = 0.$$

Cette équation fournit la relation

$$\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{y}{x} \frac{2x^2 + a^2}{2y^2 - a^2},$$

qui, portée dans l'équation de condition

$$1 - \frac{f'_x}{f'_y} \frac{dy}{dx} = 0,$$

donne

(3) $$1 - \frac{y}{x} \frac{2x^2 + a^2}{2y^2 - a^2} \frac{dy}{dx} = 0;$$

le paramètre c a disparu par la différentiation, de sorte que l'équation (3) est l'équation différentielle des trajectoires demandées.

Pour l'intégrer, on sépare les variables et l'on obtient l'équation

$$\frac{x\,dx}{x^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{y\,dy}{y^2 - \frac{a^2}{2}},$$

dont l'intégrale est

$$2x^2 + a^2 = b^2(2y^2 - a^2),$$

ou

$$(4) \qquad 2x^2 - 2b^2y^2 + a^2(1 + b^2) = 0,$$

b^2 désignant une constante arbitraire, qui a dû être prise positive.

L'équation (4) représente les trajectoires orthogonales des courbes (1); ce sont des hyperboles ayant leur centre à l'origine, leurs foyers sur l'axe des y à une distance $\pm \frac{a(1 + b^2)}{b\sqrt{2}}$ de l'origine, et dont les asymptotes sont représentées par l'équation double

$$y = \pm bx.$$

2. *L'angle α étant supposé compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, soit*

$$(1) \qquad \rho^2 = a^2 \log \frac{\operatorname{tang}\omega}{\operatorname{tang}\alpha}$$

l'équation d'une courbe en coordonnées polaires; on demande si l'aire du secteur limité par cette courbe et par les rayons vecteurs correspondant à $\omega = \alpha$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$ a une valeur finie ou infinie.

Le rayon vecteur ρ s'annulant pour $\omega = \alpha$ et devenant infini pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, le secteur dont on veut étudier l'aire est illimité et compris entre la courbe passant à l'origine et tangente à la droite qui fait un angle α avec l'axe polaire, et une perpendiculaire menée à cet axe par l'origine, et qui est une asymptote de la courbe.

Il s'agit de savoir si

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\tang \omega}{\tang \alpha}\, d\omega$$

a une valeur finie ou infinie.

Pour cela, comme

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\tang \omega}{\tang \alpha}\, d\omega = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \log \tang \omega\, d\omega - \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \log \tang \alpha\, d\omega,$$

il suffit de chercher si

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \log \tang \omega\, d\omega$$

a une valeur finie ou infinie.

Je remarque que

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \log \tang \omega\, d\omega = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \tang \omega\, d\omega - \int_{0}^{\alpha} \log \tang \omega\, d\omega.$$

Or, α étant inférieur à $\frac{\pi}{2}$, aucun des éléments de $\int_{0}^{\alpha} \log \tang \omega\, d\omega$ ne devient infini; cette intégrale a une valeur finie, et il reste à considérer

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \tang \omega\, d\omega.$$

Mais

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \tang \omega\, d\omega = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \omega\, d\omega - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log \cos \omega\, d\omega,$$

et, comme on a évidemment

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin \omega \, d\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos \omega \, d\omega,$$

l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{tang} \omega \, d\omega$ est nulle; par conséquent, l'intégrale proposée a une valeur finie qui est

$$\frac{1}{2} \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\operatorname{tang} \omega}{\operatorname{tang} \alpha} \, d\omega$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \log \operatorname{tang} \alpha + \int_0^{\alpha} \log \operatorname{tang} \omega \, d\omega \right].$$