NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. TOURRETTES

Solution de la question de licence proposée au concours d'agrégation en 1876

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 18 (1879), p. 118-122

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1879_2_18__118_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE LICENCE PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1876;

PAR M. A. TOURRETTES.

Un point matériel M *se meut sur un cercle horizontal qui tourne d'un mouvement uniforme autour* *d'un axe vertical passant par un point* O *de la circonférence :*

1° *Etudier le mouvement relatif du mobile* M *sur le cercle ;*

2° *Déduire de là les lois du mouvement absolu du mobile dans le plan fixe ;*

3° *Examiner en particulier le cas où la vitesse du mobile sur le cercle devient nulle, quand le mobile arrive au point* O ; *dans ce dernier cas, calculer et discuter la valeur de la pression exercée par le mobile sur le cercle.*

On fait abstraction de la pesanteur et du frottement.

Soient a le rayon du cercle (*), Ox la position initiale du diamètre OCA, ω la vitesse angulaire de rotation, θ l'angle du rayon CM à l'époque t, alors ωt sera l'angle du diamètre OA avec Ox.

1° Cela posé, le mouvement du point M est uniquement dû aux forces qui naissent de la rotation ω. Ces forces sont au nombre de deux : la force d'entraînement prise en sens contraire, qui n'est autre que la force centrifuge $\omega^2.\mathrm{OM}$ ou $2a\omega^2\cos\frac{\theta}{2}$; la force centrifuge composée, qui a pour expression $2\omega v$, et dont la direction est MO.

La première force, projetée sur la tangente au point M, donne

$$2a\omega^2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \quad \text{ou} \quad a\omega^2\sin\theta ;$$

quant à la seconde, elle n'intervient pas dans le mouvement.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

L'équation du mouvement relatif sera donc

$$(1) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 \sin\theta,$$

en remarquant que la force tangentielle tend à diminuer l'angle θ.

Cette équation n'est autre que celle du pendule simple, où l'on remplacerait $\frac{g}{l}$ par ω^2. Je multiplie les deux membre de (1) par $2d\theta$, et j'ai par une première intégration

$$(2) \qquad \frac{d\theta^2}{dt^2} = c + 2\omega^2 \cos\theta,$$

d'où

$$dt = \frac{d\theta}{\sqrt{c + 2\omega^2 \cos\theta}}.$$

On aura donc θ en fonction de t par une quadrature, qui ne peut s'effectuer en quantités finies généralement.

2° Il est facile, quand θ est connu, d'avoir la position du mobile dans le mouvement absolu. Soient r la valeur de OM, et φ son angle avec Ox, on aura immédiatement

$$\varphi = \omega t - \frac{\theta}{2},$$

$$r = 2a \cos\frac{\theta}{2}.$$

3° Passons au cas particulier où la vitesse du mobile, sur le cercle, devient nulle quand le mobile arrive au point O.

Dans ce cas, l'équation (2) donne

$$c = 2\omega^2,$$

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = 2\omega^2(1 + \cos\theta) = 4\omega^2 \cos^2\frac{\theta}{2},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\omega \cos\frac{\theta}{2}.$$

On peut écrire successivement

$$\omega dt = \frac{\cos\frac{\theta}{2}\, d\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{d\sin\frac{\theta}{2}}{1 - \sin^2\frac{\theta}{2}};$$

par suite,

$$\omega t + c' = \frac{1}{2}\,\text{lognép}\, \frac{1 + \sin\frac{\theta}{2}}{1 - \sin\frac{\theta}{2}}.$$

Si l'on suppose qu'à l'origine du mouvement le point M est à l'extrémité du diamètre OA, il faut que $c' = 0$. Donc

$$2\omega t = \text{lognép}\, \frac{1 + \sin\frac{\theta}{2}}{1 - \sin\frac{\theta}{2}}.$$

Cette équation donne le mouvement relatif; on en tire

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}, \quad \cos\frac{\theta}{2} = \frac{2}{e^{\omega t} + e^{-\omega t}};$$

par suite.

$$r = 2a\cos\frac{\theta}{2} = \frac{4a}{e^{\omega t} + e^{-\omega t}},$$

$$\varphi = \omega t - \arccos\frac{2}{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}.$$

Ce sont les équations de la trajectoire dans le mouvement absolu. En prenant les dérivées de r et de φ par rapport à t, on trouve que r diminue et que φ augmente avec t; on en conclut que la trajectoire absolue est une spirale qui s'enroule autour du point O.

Les résultats que je viens d'obtenir me permettront de calculer aisément la pression, qui n'est autre que la résultante de la composante normale des forces centrifuges et de la force centrifuge composée.

La composante normale de la force centrifuge provenant de la rotation est $2a\omega^2\cos^2\frac{\theta}{2}$; il y a, en outre, la force centrifuge provenant du mouvement relatif de M : $a\frac{d\theta^2}{dt^2} = 4a\omega^2\cos^2\frac{\theta}{2}$. Donc, en somme, j'ai pour les forces centrifuges $6a\omega^2\cos^2\frac{\theta}{2}$.

Il faut enfin tenir compte de la force centrifuge composée $2\omega v_r = 2\omega . 2\omega a\cos\frac{\theta}{2} = 4\omega^2 a\cos\frac{\theta}{2}$, dont la direction est de M vers C.

Par conséquent, la pression

$$R = 6a\omega^2\cos^2\frac{\theta}{2} - 4a\omega^2\cos\frac{\theta}{2} = 2a\omega^2\cos\frac{\theta}{2}\left(3\cos\frac{\theta}{2} - 2\right).$$

Pour $\theta = 0$, $R = 2a\omega^2$, c'est la force centrifuge due à la rotation ω; prenons la dérivée de R,

$$\frac{dR}{d\theta} = 2a\omega^2\sin\frac{\theta}{2}\left(2 - 3\cos\frac{\theta}{2}\right);$$

nous voyons que, pour $\theta = 0$, $\frac{dR}{d\theta} = 0$, et que la valeur de $R = 2a\omega^2$ est un maximum; θ augmentant, R diminue et s'annule pour

$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad \cos\theta = -\frac{1}{3};$$

puis R devient négatif et s'annule de nouveau pour $\theta = \pi$. Quand $\cos\theta = -\frac{1}{3}$, R est un minimum; il est maximum pour $\theta = \pi$.

Note. — La même question a été résolue par MM. Gambey et Escary