LAGUERRE

Sur la résolution des équations numériques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 97-101

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__97_0>

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES;

PAR M. LAGUERRE.

[SUITE (*).]

II.

Examen du cas où toutes les racines de l'équation sont réelles.

5. Considérons une équation du degré n, $F(z) = 0$, ayant toutes ses racines réelles.

Soit la courbe dont l'équation est $u = F(z)$, prenons un point quelconque M sur cette courbe et par ce point menons une parallèle à l'axe des u et la tangente à la courbe. Soient respectivement P et T les points où ces droites coupent l'axe des z; portons sur cet axe, à partir du point P et dans la direction PT, une longueur PT' égale à $n \times$ PT.

Du théorème I et de l'interprétation géométrique de la méthode de Newton, on déduit immédiatement la proposition suivante :

La courbe dont l'équation est $u = F(z)$ rencontre au moins une fois l'axe des z entre les points T *et* T'.

6. Cette propriété n'est qu'un cas particulier d'une propriété beaucoup plus générale.

Convenons, comme précédemment, de représenter une

(*) *Nouv. Ann.*, 2e série, t. XVII, p. 20.

quantité imaginaire quelconque $\alpha + \beta i$ par un point d'un plan ayant respectivement α et β pour abscisse et pour ordonnée relativement à deux axes rectangulaires arbitrairement choisis.

L'équation $F(z) = 0$ ayant toutes ses racines réelles, ces diverses racines seront représentées par divers points de l'axe des abscisses.

Cela posé, j'énoncerai d'abord la proposition suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation $F(z) = 0$ *ait toutes ses racines réelles est que chaque point du plan et son point dérivé soient situés de part et d'autre de l'axe des abscisses.*

En effet, si un point m et son point dérivé μ se trouvaient d'un même côté relativement à l'axe des abscisses, on pourrait, par les deux points m et μ, faire passer un cercle situé entièrement d'un même côté par rapport à cet axe. L'équation, en vertu du théorème I, aurait donc au moins une racine imaginaire, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Réciproquement, si l'équation a des racines imaginaires, on peut trouver une infinité de points dont les points dérivés sont situés du même côté relativement à l'axe des abscisses.

Il suffit pour le démontrer de remarquer que, quand un point m du plan tend vers une racine ζ de l'équation, le point dérivé μ tend vers la même racine ; en prenant m suffisamment rapproché de ζ, on pourra évidemment faire en sorte que le point dérivé soit situé du même côté relativement à l'axe des abscisses.

La proposition précédente est donc entièrement établie.

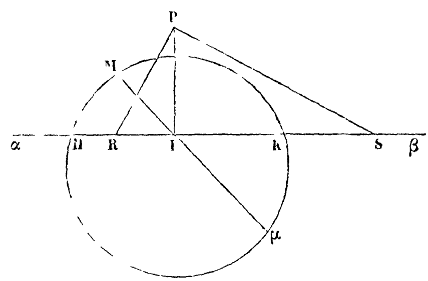
7. La droite $\alpha\beta$ désignant l'axe des abscisses (*fig.* 1), soit M un point quelconque du plan et μ son point dérivé. Comme je viens de le faire remarquer, les deux points M

et μ sont situés de part et d'autre de l'axe des abscisses ; menons par ces points un cercle quelconque, et soient H et K les points où ce cercle coupe l'axe $\alpha\beta$.

En vertu du théorème I, le cercle renferme au moins une racine, et comme, par hypothèse, toutes les racines de l'équation sont réelles, cette racine est comprise entre les points H et K.

Les points M et μ restant fixes, on peut faire varier le cercle, et l'on obtiendra ainsi une infinité de seg-

Fig. 1.



ments analogues à HK et tels que chacun d'eux renfermera au moins une racine. Soit I le point de rencontre de M μ avec l'axe ; au point I, élevons une perpendiculaire de longueur IM, telle que $\overline{\mathrm{IP}}^2 = \overline{\mathrm{MI}} \times \mu\mathrm{I}$.

Les divers segments dont je viens de parler sont vus du point P sous un angle droit.

A chaque point M du plan correspond donc un point P, défini comme je viens de le dire, et jouissant de la propriété énoncée dans la proposition suivante :

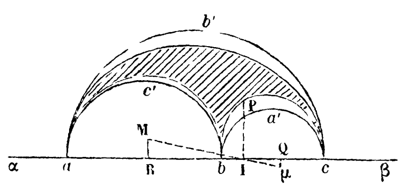
Si, par le point P, *on mène deux droites rectangulaires quelconques interceptant sur l'axe un segment* RS, *ce segment renferme au moins une racine de l'équation et en renferme au plus* $(n-1)$.

En considérant diverses positions du point M, on obtiendra autant de positions du point correspondant P. Il est facile de se rendre compte comment ces points P sont distribués dans le plan.

Supposons, pour fixer les idées, que l'équation soit du troisième degré et désignons par a, b, c (*fig.* 2) les points qui, sur l'axe $\alpha\alpha'$, représentent les racines de l'équation.

Sur chacun des trois segments ab, bc et ca comme diamètres décrivons une demi-circonférence : nous obtiendrons ainsi trois arcs de cercle formant une sorte de triangle curviligne $ac'ba'cb'a$.

Fig. 2.



En examinant la figure, on verra facilement que deux droites rectangulaires quelconques passant par un point situé dans l'intérieur de ce triangle interceptent sur l'axe un segment renfermant au moins une racine de l'équation et en renfermant au plus deux. Au contraire, si l'on prend arbitrairement un point en dehors de ce triangle, on peut toujours par ce point mener deux droites rectangulaires interceptant sur l'axe un segment ne comprenant aucune racine de l'équation ou les comprenant toutes.

Tous les divers points P couvrent donc une portion du plan comprise tout entière dans le triangle curviligne $ac'ba'cb'a$, et il est facile de voir que la courbe qui la limite est tangente aux cercles aux points a, b, c et a un rebroussement en chacun de ces points.

Dans la *fig.* 2, cette portion du plan a été couverte de hachures. (*A suivre.*)