Nouvelles annales de mathématiques

Gambey

Solution de la question de mathématiques spéciales proposée au concours d'agrégation en 1875

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 77-83

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__77_1>

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1875;

PAR M. GAMBEY.

A un ellipsoïde donné on circonscrit une série de surfaces du deuxième ordre Σ, *la courbe de contact* *étant l'intersection de l'ellipsoïde par un plan fixe* P. *On circonscrit ensuite à chaque surface* Σ *un cône ayant pour sommet un point donné* A :

1° *Trouver le lieu des courbes de contact des cônes et des surfaces* Σ;

2° *Classer les surfaces qui forment le lieu quand on suppose le plan* P *fixe et le point* A *mobile dans l'espace.*

On déterminera, pour chacune des variétés du lieu, les surfaces qui limitent les régions de l'espace où se trouve alors le point A.

L'équation d'un ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués de longueurs a, b, c, choisis de manière que le plan des xy soit parallèle au plan P, étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

si l'on déplace parallèlement à lui-même le plan des xy, de manière qu'il coïncide avec le plan P, cette équation deviendra

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z+h)^2}{c^2} - 1 = 0,$$

h étant la distance de la nouvelle origine à l'ancienne.

L'équation générale des surfaces Σ sera alors

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z+h)^2}{c^2} - 1 - \lambda z^2 = 0,$$

et celle du plan polaire du point A (α, β, γ) par rapport à ces surfaces

$$(2)\qquad \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{h+\gamma-\lambda c^2\gamma}{c^2} z + \frac{h^2-c^2+h\gamma}{c^2} = 0.$$

Les coordonnées d'un point quelconque de la courbe de contact dont on cherche le lieu satisfaisant aux équations (1) et (2), on obtiendra ce lieu en éliminant λ entre ces deux équations, ce qui donne

$$(\mathrm{S})\quad \left\{\begin{aligned} &\gamma\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)-\frac{hz^2}{c^2}-\frac{\beta yz}{b^2}-\frac{\alpha zx}{a^2}\\ &\qquad+\frac{h\gamma+\mathrm{K}^2}{c^2}z-\frac{\mathrm{K}^2\gamma}{c^2}=0,\end{aligned}\right.$$

en posant $c^2-h^2=\mathrm{K}^2$.

On peut encore écrire ainsi cette équation

$$(\mathrm{S})'\quad \left\{\begin{aligned} &\gamma\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{(z+h)^2}{c^2}-1\right]\\ &\quad -z\left[\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{(\gamma+h)(z+h)}{c^2}-1\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Discussion. — On constate facilement, en supposant $\mathrm{K}^2>0$:

1° Que toutes les surfaces (S) passent par le point A et par le pôle du plan P, point qui a pour coordonnées

$$x=0,\quad y=0,\quad z=\frac{\mathrm{K}^2}{h};$$

2° Qu'elles ont en commun l'ellipse

$$z=0,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{\mathrm{K}^2}{c^2}=0,$$

et, par suite, ne peuvent être des *paraboloïdes hyperboliques* ni des *cylindres paraboliques;*

3° Que, pour $\gamma>0$, elles représentent des *hyperboloïdes,* et pour $\gamma=0$ deux plans dont l'un est le plan P et l'autre le plan polaire du point A par rapport à l'ellipsoïde;

4° Enfin qu'elles sont *bitangentes* à l'ellipsoïde, comme le montre la forme (S)', et qu'elles le coupent suivant le plan P et le plan polaire du point A.

Gardant les hypothèses $\gamma\gtrless 0$ et $\mathrm{K}^2>0$, nous classerons les surfaces (S) en employant la décomposition en carrés.

Multipliant par 4γ, deux carrés se forment immédiatement, et l'on obtient

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{2\gamma x - \alpha z}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\gamma y - \beta z}{b}\right)^2 - Pz^2 \\ &\qquad + \frac{4\gamma(h\gamma + K^2)z}{c^2} - \frac{4K^2\gamma^2}{c^2} = 0, \end{aligned}\right.$$

après avoir posé

$$\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{4h\gamma}{c^2} = P.$$

Distinguons maintenant deux cas :

I. $P \gtrless 0$. Multiplions par P l'équation (3) et formons le carré par rapport à z; il vient

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &P\left(\frac{2\gamma x - \alpha z}{a}\right)^2 + P\left(\frac{2\gamma y - \beta z}{b}\right)^2 - \left[Pz - \frac{2\gamma(h\gamma + K^2)}{c^2}\right]^2 \\ &\quad = \frac{4\gamma^2}{c^2}\left[K^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) - \frac{(h\gamma - K^2)^2}{c^2}\right]. \end{aligned}\right.$$

On peut encore, par une transformation facile, écrire ainsi le second membre :

$$\frac{4\gamma^2}{c^4}\left[c^2K^2P - (h\gamma + K^2)^2\right].$$

Posant

$$\frac{2\gamma x - \alpha z}{a} = A, \quad \frac{2\gamma y - \beta z}{b} = B, \quad Pz - \frac{2\gamma(h\gamma + K^2)}{c^2} = C,$$

$$\frac{4\gamma^2}{c^2}\left[K^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}\right) - \frac{(h\gamma - K^2)^2}{c^2}\right] = Q,$$

l'équation (4) prendra la forme caractéristique

$$(I)\qquad PA^2 + PB^2 - C^2 = Q.$$

II. $P = 0$. Si P est nul, on ne peut plus multiplier par P; mais, en annulant cette quantité (3), on obtient la forme ci-dessous

$$\text{(II)} \qquad A^2 + B^2 + D = 0,$$

après avoir posé

$$4\gamma\left(\frac{h\gamma + K^2}{c^2}\right)z - \frac{4K^2\gamma^2}{c^2} = D.$$

On voit que, P étant négatif, on aura des *ellipsoïdes réels*, parce que Q est alors nécessairement négatif, sauf pour $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = \frac{K^2}{h}$, auquel cas les surfaces (S) se réduisent à un point, le point A, pôle du plan P. Tandis que, pour $P > 0$, on aura des *hyperboloïdes à une nappe*, si Q est positif, des *cônes* réels pour $Q = 0$, et des *hyperboloïdes à deux nappes*, si Q est négatif.

Si $P = 0$, on aura des *paraboloïdes elliptiques*, à moins que D ne se réduise à une constante, ce qui arrivera, si l'on a aussi $Q = 0$. En effet, la seconde forme de Q montre que, si l'on a simultanément $P = 0$, $Q = 0$, on a nécessairement $h\gamma + K^2 = 0$, et, par suite, D se réduit à $-\frac{4K^2\gamma^2}{c^2}$. Dans ce cas l'équation (II) sera celle d'un *cylindre elliptique* dont l'axe est défini par les équations $A = 0$, $B = 0$.

Avant de poursuivre cette discussion, étudions la nature et la position des surfaces représentées par les équations $P = 0$, $Q = 0$, où nous regarderons α, β, γ comme les coordonnées courantes d'un point.

La première représente un *paraboloïde elliptique*, tangent à l'origine au plan P et situé tout entier du côté des z négatifs; ses diamètres sont parallèles à l'axe des z.

La deuxième représente un *cône*, ainsi que le montre la première forme de Q, abstraction faite du facteur

$\frac{4\gamma^2}{c^2}$, qui n'est pas nul. La seconde forme de Q montre que ce cône est circonscrit au paraboloïde $P = o$, la courbe de contact étant l'intersection du plan $h\gamma + K^2 = o$ avec le paraboloïde. Il en résulte que le plan P est à égale distance du centre de cette courbe et du sommet du cône $Q = o$. Du reste, le sommet de ce cône est le pôle du plan P; d'où il suit qu'il est aussi circonscrit à l'ellipsoïde.

Nous pouvons maintenant délimiter nettement les diverses régions occupées par le point A quand l'équation (S) représente telle ou telle surface. Ces régions sont au nombre de *trois* :

1° Celle qui occupe l'intérieur du paraboloïde $P = o$, et pour tous les points de laquelle on a $P < o$. Elle correspond aux ellipsoïdes de l'équation (S); car, à cause de la position du cône $Q = o$, on a nécessairement pour les points de cette région $Q < o$.

2° Celle qui est située à l'intérieur du cône, mais à l'extérieur du paraboloïde, et pour tous les points de laquelle on a $P > o$ et $Q < o$. Elle correspond aux hyperboloïdes à deux nappes de l'équation (S).

3° Enfin celle qui est tout entière à l'extérieur du cône $Q = o$ et pour laquelle on a nécessairement $P > o$ et $Q > o$. Elle correspond aux hyperboloïdes à une nappe de l'équation (S).

Comme transition, si le point A est sur le paraboloïde $P = o$, l'équation (S) représente un paraboloïde elliptique. S'il est sur le cône $Q = o$, la même équation représente aussi un cône. Enfin, si le point A est sur la courbe de contact de $P = o$ et de $Q = o$, la surface (S) représente un cylindre elliptique. Si l'on avait $K^2 < o$, c'est-à-dire $h > c$, le plan P ne couperait plus réellement l'ellipsoïde. On aurait toujours $Q < o$, sauf pour $c = o$,

$\beta = 0$ et $\gamma = \frac{K^2}{h}$. Il n'y aurait donc plus d'ellipsoïdes imaginaires, ni de cônes imaginaires, à moins que l'on n'eût $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = \frac{K^2}{h}$, auquel cas les cônes se réduiraient à un point, le point A, intérieur à l'ellipsoïde et pôle du plan P. Il n'y aurait plus également de cônes réels proprement dits, ni d'hyperboloïdes à une nappe.

Nota. — La même question a été résolue par MM. E. Humbert, élève du lycée de Besançon; Duranton, chargé de cours au lycée du Puy; V. Hioux, professeur au lycée de Rennes; A. Tourrettes, censeur au lycée d'Albi; Escary, professeur au lycée de Châteauroux; Lévy, professeur au lycée de Rennes.