NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LAGUERRE

Sur la cardioïde

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 17 (1878), p. 55-69

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__55_1>

SUR LA CARDIOÏDE;

PAR M. LAGUERRE.

1. La cardioïde est l'épicycloïde engendrée par un point d'un cercle mobile qui roule sans glisser sur un cercle de même rayon.

C'est une courbe de troisième classe et du quatrième degré (*), ayant, par conséquent, une tangente double et trois points de rebroussement; deux de ces points de rebroussement sont les ombilics du plan. Les trois foyers de la courbe se réduisent à un seul foyer F, qui est le point de rencontre des tangentes menées aux ombilics.

La cardioïde peut donc être définie comme une courbe de *troisième classe, ayant une tangente double et un foyer singulier de rebroussement.*

2. Dans tout ce qui suit, je m'appuierai principalement sur les deux propositions suivantes :

PROPOSITION I (**). — *Si, par un point quelconque du*

(*) *Voir* SALMON, *Higher plane curves*, p. 270.

(**) *Voir* ma Note intitulée : *Théorèmes généraux sur les courbes algé-*

plan, on mène les trois tangentes à une courbe de troisième classe, et si l'on joint ce point aux trois foyers de la courbe, les deux faisceaux de droites ainsi obtenus ont même orientation, c'est-à-dire que la somme des angles que chacune des droites du premier faisceau fait avec une direction arbitraire est égale, à un multiple près de π, *à la somme des angles que font, avec cette même direction, les droites du second faisceau.*

PROPOSITION II (*). — *Si, par un point quelconque* M *du plan, on mène les trois tangentes à une courbe de troisième classe, le centre harmonique des trois points de contact, relativement au point* M, *est le même que le centre harmonique des trois foyers relativement à ce même point. En d'autres termes, la polaire du point* M, *relativement au triangle formé par les normales menées à la courbe par les trois points de contact des tangentes, se confond avec la polaire du même point relativement au triangle formé par les droites menées par chacun des foyers perpendiculairement à la droite qui le joint au point* M.

3. Les foyers de la cardioïde se confondent tous les trois avec le foyer singulier F de cette courbe. On déduit donc immédiatement de la proposition I le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Si d'un point quelconque* M *on mène les trois tangentes à la cardioïde, la somme des angles que font ces droites avec la droite* MF *est égale à un multiple de* π.

---

briques (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, janvier 1865).

(*) *Voir* ma Note *Sur la détermination du rayon de courbure des lignes planes* (*Bulletin de la Société philomathique*, fevrier 1867).

La cardioïde a un troisième point de rebroussement réel R, et, d'après un théorème très connu, la tangente en R passe par le point F. D'un point quelconque de la droite FR, on peut mener trois tangentes à la courbe, dont l'une se confond avec FR. Du théorème précédent il résulte que les deux autres tangentes sont également inclinées sur FR; donc :

La cardioïde est symétrique par rapport à l'axe FR.

4. La proposition II, appliquée à la cardioïde, donne de même le théorème suivant :

Théorème II. — *Si d'un point quelconque* M *on mène les trois tangentes à la cardioïde et les normales aux points de contact, le pied de la perpendiculaire, abaissée du point* M *sur sa polaire relativement au triangle formé par les normales, est le foyer de la courbe.*

Ce que l'on peut encore exprimer sous la forme suivante, plus commode dans les applications :

Soient N, N′, N″ *les normales menées aux trois points de contact et* Φ *la droite menée par le point* F *perpendiculairement à* FM; *si, par le point* M, *on mène une sécante arbitraire coupant respectivement les droites* N, N′, N″ *et* Φ *aux points* n, n', n'' *et* φ, *on a, entre ces points, la relation*

$$\frac{3}{M\varphi} = \frac{1}{Mn} + \frac{1}{Mn'} + \frac{1}{Mn''}.$$

5. Supposons, en particulier, que le point soit pris sur la droite FR; désignons par T ce point, par M le point de contact d'une des tangentes, distinctes de TF, que l'on peut mener à la courbe par le point T, enfin par N le point où la normale au point M rencontre l'axe FR. Il est clair que la normale menée par le troisième point de

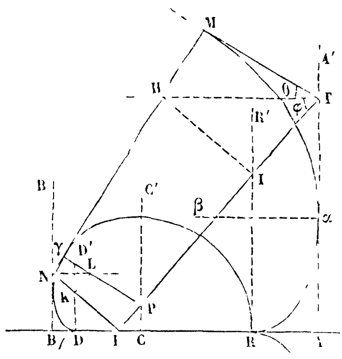
contact rencontrera également au point N l'axe de symétrie. En prenant donc pour sécante l'axe lui-même, l'équation précédente donnera la relation

$$(1) \qquad \frac{3}{TF} = \frac{2}{TN} + \frac{1}{TR},$$

qui lie entre eux les points de rencontre de l'axe avec la tangente et la normale menées en un point quelconque de la courbe.

6. Soient (*fig.* 1) une cardioïde ayant pour foyer F, pour axe FA, et $A\alpha$ la tangente double de cette courbe,

Fig. 1.



α étant le point de contact situé au-dessus de l'axe.

Portons à gauche du foyer F une longueur $FB = \frac{\overline{A\alpha}^2}{FA}$ et à gauche du point A une longueur $AR = \frac{AF}{3}$, puis aux points B, R et A élevons à l'axe des perpendiculaires BB', RR' et AA'.

Cela posé, par le point F, menons deux droites rectangulaires quelconques rencontrant respectivement les droites BB′ et AA′ aux points N et T. Au point I, où la droite FT coupe RR′, menons une perpendiculaire à FT et appelons H le point où cette perpendiculaire rencontre la parallèle à l'axe menée par le point T; menons enfin la droite NH.

Je dis que *la perpendiculaire abaissée du point* T *sur* NH *est tangente à la cardioïde, le point de contact étant précisément le pied* M *de cette perpendiculaire, en sorte que* MN *est normale à la courbe.*

Pour le démontrer, je ferai remarquer que, des trois tangentes que l'on peut mener à la courbe par le point T, deux se confondent avec la tangente double, leurs points de contact étant d'ailleurs le point α et son symétrique α' par rapport à l'axe. Les normales en ces deux points sont les droites $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ parallèles à l'axe. La troisième tangente touche la courbe en un point variable avec la position du point T; désignons pour un instant par Δ la normale au point de contact.

Il suit du théorème II que la polaire du point T relativement à la droite NF (cette droite étant considérée comme triple) se confond avec la polaire de ce même point relativement aux droites $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ et Δ.

Les triangles semblables BNF et FAT donnent la relation

$$BN \times AT = BF \times FA = \overline{A\alpha}^2 ;$$

de là résulte que la polaire du point T, relativement aux droites $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$, est la droite NL menée par le point N parallèlement à l'axe.

La proposition précédente peut par suite s'énoncer ainsi : La polaire du point T relativement à la droite Δ et à la droite NL (cette dernière étant considérée comme double) se confond avec la polaire de ce point relativement à FN (cette dernière droite étant considérée comme triple); et de là résulte d'abord que la droite Δ passe par le point N.

Pour en déterminer un autre point, menons par le point T une parallèle à l'axe; soient Q (*) le point où cette parallèle rencontre NF, et H le point où elle rencontre Δ.

D'après ce que j'ai dit ci-dessus, on aura

$$\frac{3}{TQ} = \frac{1}{TH}.$$

Menons par le point H une perpendiculaire à FT; en désignant par I' son pied, on voit que les deux triangles FQT et I'HT sont semblables et donnent la proportion

$$\frac{I'T}{FT} = \frac{HT}{TQ} = \frac{1}{3};$$

I'T est dans le tiers de FT et le point I' se confond avec le point I.

La proposition précédente est donc entièrement démontrée.

Elle donne un moyen facile de mener à la cardioïde une tangente par un point quelconque de la tangente double, ou encore de lui mener une normale par un point quelconque de la droite BB' qui, il est facile de le voir, passe par les deux points de la courbe où la tangente est parallèle à l'axe.

En particulier, on en déduit le théorème suivant :

Théorème III. — *Si, par un point quelconque de la cardioïde, on mène la tangente et la normale à la courbe et si l'on désigne par* T *le point où la tangente rencontre la tangente double* AA', *par* N *le point où la*

(*) Les points Q et α', ainsi que la droite $\alpha'\beta'$, ne se trouvent pas sur la figure; le lecteur est prié d'y suppléer.

normale rencontre la droite BB′ *qui joint les points de la courbe où la tangente est parallèle à l'axe, les deux points* T *et* N *sont vus du foyer suivant un angle droit.*

7. Quelques remarques sur ce qui précède ne seront pas inutiles.

Au point α la normale rencontre l'axe à l'infini et la tangente le rencontre au point A ; en désignant, pour un instant, par R′ le point de rebroussement de la courbe, on aura donc, en vertu de la relation (1),

$$\frac{3}{AF} = \frac{1}{AR'},$$

d'où $AR' = AR$. Le point R est donc le point de rebroussement.

Si l'on considère l'un des points situés sur la droite BB′ et où la tangente est horizontale, le point de rencontre de la tangente avec l'axe est à l'infini et le point de rencontre de la normale est en B. En vertu de la relation (1), on aura donc

$$BR = 3BF, \quad \text{d'où} \quad BF = RA = \frac{FA}{3}.$$

Les tangentes que l'on peut mener à la courbe du point T sont, d'une part, la droite TM et, d'autre part, la droite Tα, cette dernière étant comptée deux fois.

En vertu du théorème I, on a donc

$$\widehat{MTI} + 2\widehat{A'TI} = \text{mult.}\,\pi;$$

ou, si l'on pose,

$$\widehat{HTI} = \varphi \quad \text{et} \quad \widehat{MTH} = \theta,$$

$$\theta + 3\varphi = \pi.$$

Au moyen des équations précédentes, il est facile d'établir un grand nombre de relations entre les éléments de la *fig.* 1; je me bornerai à mentionner les suivantes :

$$\text{NM} = \text{NF} + \text{AB} \sin \varphi,$$
$$\text{TF} = \text{TM} + \text{AB} \cos \varphi.$$

8. Le point D étant déterminé par la relation $\text{BD} = \frac{\text{BC}}{3}$, élevons en ce point une droite DD′ perpendiculaire à l'axe; soit K le point où cette perpendiculaire coupe NF. Menons KL perpendiculaire à NF et NL parallèle à l'axe; abaissons enfin, du point de rencontre L de ces deux lignes, une perpendiculaire sur la normale MN.

Je dis que *le point γ, où elle rencontre cette normale, est le centre de courbure de la cardioïde au point* M.

Soit, en effet, P le point où cette droite coupe FT, on démontrera aisément, en s'appuyant sur les propositions précédentes, que

$$\text{FP} = \frac{1}{9} \text{FT};$$

par suite, le point P décrit, lorsque le point M se déplace sur la courbe, une droite perpendiculaire à l'axe et dont le pied est à une distance

$$\text{FC} = \frac{1}{3} \text{FB}.$$

En se reportant à ce que j'ai dit plus haut, on voit aisément que la normale NM enveloppe une cardioïde ayant pour tangente double BB′ et pour foyer le point F.

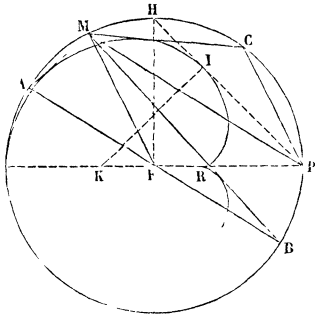
Le point de contact de la normale avec l'enveloppe est le point γ; ce qui démontre la proposition énoncée.

On voit aussi que la développée de la cardioïde est une cardioïde semblable à la proposée, le rapport de réduction étant $\frac{1}{3}$, proposition d'ailleurs bien connue.

9. Un autre mode de génération de la cardioïde mérite d'être signalé.

Soient (*fig.* 2) un cercle ayant pour centre F et un point fixe P pris sur cette courbe. Par le point P menons une sécante quelconque coupant le cercle en M; par le centre F menons une parallèle à cette sécante rencontrant le cercle aux points A et B, joignons enfin MA et MB. Ces droites enveloppent, lorsqu'on fait varier la direction de la sécante, une courbe qui est évidemment de troisième classe et unicursale.

Fig. 2.



Si l'on cherche les tangentes *isotropes* que, d'après la construction précédente, on peut mener à la courbe, on trouve facilement qu'elles passent par le point F; d'ailleurs la courbe n'est évidemment pas tangente à la droite de l'infini.

On en conclut que cette courbe est de *troisième classe, unicursale, et à foyer singulier triple,* par conséquent c'est une *cardioïde.* Quelques propriétés intéressantes se déduisent du mode de génération que je viens d'indiquer.

Il est facile, en premier lieu, de trouver le point de rebroussement de la courbe. Je remarquerai, à cet effet, que si, au point F, on élève une perpendiculaire au rayon FP, la droite HP est une tangente à la courbe et qui la touche au point I déterminé par la relation

$$\mathrm{HI} = \frac{\mathrm{HP}}{3}.$$

Au point I, menons la normale à la courbe et soit K le point où elle rencontre l'axe, en désignant par R le point de rebroussement de la cardioïde; on aura, en vertu de la relation (1),

$$\frac{3}{\mathrm{PF}} = \frac{2}{\mathrm{TK}} + \frac{1}{\mathrm{PR}},$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{FR} = \frac{\mathrm{FP}}{3}.$$

Considérons, en second lieu, un point quelconque M du cercle; si, par F, on mène une parallèle à MP rencontrant le cercle aux points A et B, deux des tangentes que l'on peut mener du point M à la courbe sont les droites MA et MB.

La troisième tangente s'obtiendrait en menant par le point P une parallèle à MF et en joignant au point M le point C où cette parallèle coupe le cercle.

On voit que les deux tangentes MA et MB sont à angle droit; d'où la proposition suivante :

THÉORÈME IV. — *Si, d'un point quelconque du cercle* K *passant par le sommet de la cardioïde et ayant pour centre son foyer, on mène les tangentes à la courbe, deux de ces tangentes sont rectangulaires* (*).

10. Considérons (*fig.* 2) les deux points M et C qui

(*) *Voir* à ce sujet ma Note *Sur les courbes unicursales de troisième classe*, communiquée à la Société mathématique en novembre 1877.

sont les extrémités d'une corde tangente à la cardioïde; on voit immédiatement sur la figure que l'arc MH est la moitié de l'arc PC.

La cardioïde peut donc être considérée *comme l'enveloppe de la corde qui joint deux points mobiles sur un cercle, ces deux points décrivant le cercle dans le même sens et l'un ayant une vitesse double de la vitesse de l'autre.*

Supposons que les deux points M et C se soient déplacés infiniment peu et soient venus en M′ et C′; désignons par T le point de rencontre de MC et de M′C′. On aura $MM' = \frac{1}{2} CC'$; d'autre part, les triangles semblables MM′T et CC′T donnent

$$\frac{MM'}{CC'} = \frac{MT}{TC'} = \frac{1}{2}.$$

A la limite on a

donc :

$$MT = \frac{TC}{2};$$

Théorème V. — *La corde interceptée par le cercle* K *sur une tangente quelconque à la cardioïde est partagée par le point de contact en deux segments dont l'un est le double de l'autre.*

11. D'autres propriétés des normales à la cardioïde peuvent être déduites par des considérations entièrement différentes de celles qui précèdent, et en s'appuyant seulement sur la propriété suivante, à savoir que :

La cardioïde ayant un axe de symétrie et ayant pour points de rebroussement les ombilics du plan, tout cercle ayant son centre sur l'axe de symétrie ne rencontre la portion de la courbe située au-dessus de l'axe qu'en deux points distincts des ombilics.

De là résulte immédiatement la proposition suivante (*) :

Théorème VI. — *Étant pris deux points fixes quelconques* A *et* B *sur la cardioïde, soit* C *un point mobile sur cette courbe; sur les milieux des cordes* CA *et* CB, *élevons respectivement des perpendiculaires à ces cordes et soient* I *et* K *les points où ces perpendiculaires coupent l'axe. Quelle que soit la position du point* C *sur la courbe, la différence*

$$\frac{1}{FI} - \frac{1}{FK}$$

demeure constante.

Démonstration. — Je supposerai, pour fixer les idées, que les points A, B, ainsi que le point mobile C, sont sur la partie de la courbe située au-dessus de l'axe; et, pour plus de clarté, je considérerai d'abord, au lieu de la cardioïde, une *spirique* quelconque, c'est-à-dire une courbe du quatrième ordre, ayant un axe de symétrie et pour points doubles les deux ombilics du plan. Une spirique, comme on le voit aisément, jouit de la propriété qu'un cercle ayant son centre sur l'axe de symétrie ne rencontre la courbe qu'en deux points situés au-dessus de l'axe et distincts des ombilics.

Cela posé, A et B désignant deux points fixes de la spirique et C un point variable sur cette courbe, par les milieux des cordes CA et CB élevons des perpendiculaires à ces droites; soient I et K les points où ces perpendiculaires coupent respectivement l'axe de la spirique.

(*) Les considérations qui suivent s'appliquent également aux coniques et aux anallagmatiques du troisième et du quatrième ordre qui ont un axe de symétrie. *Voir* à ce sujet ma Note *Sur les spiriques* (*Bulletin de la Société philomathique*, novembre 1869).

J'établirai d'abord que les points I et K déterminent sur l'axe, lorsque le point C se déplace, une division homographique.

En effet, le point I étant donné, le point C se trouve au-dessus de l'axe et à l'intersection de la courbe avec le cercle décrit du point I comme centre avec IA pour rayon; ce point est donc parfaitement déterminé, puisque ce cercle ne rencontre la courbe au-dessus de l'axe qu'en deux points distincts des ombilics.

Le point C étant déterminé, le point K l'est également quand on se donne le point I, et l'on prouverait de même qu'à une position du point K correspond une position unique du point I; d'où il résulte que *les points* I *et* K *déterminent sur l'axe une division homographique.*

Cherchons ses deux points doubles. Le point C se déplaçant sur une des branches infinies qui passe à un ombilic ω en se rapprochant indéfiniment de cet ombilic, le cercle passant par les points A et C, et symétrique par rapport à l'axe, a pour centre, à la limite, le point où la tangente en ω, à la branche de courbe considérée, perce l'axe, c'est-à-dire le foyer singulier f correspondant à cette branche de courbe. Ce point est, par la même raison, le centre du cercle limite passant par les points B, C et symétrique par rapport à l'axe; f est donc un point double de la division homographique. Le même raisonnement s'appliquerait à la seconde branche de courbe.

Ainsi, quand on considère une *spirique générale, les deux points doubles de la division homographique, formée par les points* I *et* K, *sont les foyers singuliers de la courbe.*

Dans le cas particulier de la *cardioïde,* les points doubles à l'infini deviennent des points de rebroussement et les deux foyers singuliers viennent se réunir au foyer unique F de la courbe. La division homographique formée par les points I et K a donc deux points doubles coïncidents en F; d'où le théorème qu'il fallait démontrer.

12. Supposons que l'on fasse successivement coïncider le point mobile C avec A et avec B; dans le premier cas, la perpendiculaire élevée au milieu de AC se confond avec la normale en A et, dans le second, la perpendiculaire élevée au milieu de BC se confond avec la normale en B.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

THÉORÈME VII. — *Étant donnés deux points quelconques* A *et* B *situés sur une cardioïde, menons les normales en ces points et, par le point milieu de la corde* AB, *une perpendiculaire à cette corde; soient respectivement* a, b, i *les points où ces droites rencontrent l'axe, le point* i *et le foyer* F *de la courbe divisent harmoniquement le segment* ab.

En effet, en supposant que le point mobile C vienne successivement coïncider avec le point A et le point B et en appliquant le théorème précédent, on a

$$\frac{1}{FI} - \frac{1}{Fa} = \frac{1}{Fb} - \frac{1}{FI},$$

d'où

$$\frac{2}{FI} = \frac{1}{Fa} + \frac{1}{Fb}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En particulier, si le point B est un des points où la tangente double touche la cardioïde, le point de rencontre de la normale avec l'axe étant à l'infini, on a cette proposition :

Si l'on désigne par a *le point où la normale en un point* A *de la cardioïde rencontre l'axe, et par* i *le* *point où cet axe est rencontré par la droite élevée par le milieu de la corde, qui joint* A *à l'un des points où la courbe touche la tangente double, et perpendiculairement à cette corde*, *le point* a *est le milieu du segment* FI.

13. Je m'arrêterai ici dans cette étude des propriétés des normales à la cardioïde. Dans une prochaine Note, je ferai l'application des mêmes principes à l'étude de diverses courbes remarquables de la troisième classe et de classes plus élevées.