

ÉDOUARD LUCAS

**Sur un théorème de M. Liouville, concernant
la décomposition des nombres en bicarrés**

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 17
(1878), p. 536-537

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1878_2_17__536_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR UN THÉORÈME DE M. LIOUVILLE,
CONCERNANT LA DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN BICARRÉS;**

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

M. Liouville a démontré, dans son cours au Collège de France, qu'un nombre quelconque est une somme de 53 bicarrés, au plus. On peut abaisser cette limite à 41. En effet, il résulte de l'identité des deux expressions

$$6(x^2 + y^2 + z^2 + u^2)^2$$

et

$$(x+y)^4 + (x-y)^4 + (x+z)^4 + (x-z)^4 + (x+u)^4 + (x-u)^4 \\ + (y+z)^4 + (y-z)^4 + (y+u)^4 + (y-u)^4 + (z+u)^4 + (z-u)^4$$

que le sextuple du carré d'un nombre quelconque est une somme de 12 bicarrés, puisque l'on sait qu'un nombre quelconque est une somme de 4 carrés. Par suite, le sextuple d'une somme de 3 carrés est décomposable en 36 bicarrés. Mais Legendre a démontré que tout nombre de la forme

$$8p + 1, 2, 3, 5, 6$$

est une somme de 3 carrés; donc tout nombre de la forme

$$48p + 6, 12, 18, 30, 36$$

est une somme de 36 bicarrés, au plus. Soit R le reste de la division d'un nombre N par 48; en retranchant de N une ou plusieurs fois les bicarrés $1^4, 2^4, 3^4$, on ramène le reste R à l'un des nombres 6, 12, 18, 30, 36, et l'on arrive à former le tableau suivant, qui contient dans la colonne R le reste de la division d'un nombre N

par 48, et dans la colonne n le nombre maximum de bicarrés dont se compose N.

n	R
36	6, 12, 18, 30, 36;
37	3, 4, 7, 13, 15, 19, 21, 22, 28, 31, 34, 37, 39, 46;
38	0, 2, 5, 8, 14, 16, 20, 23, 24, 29, 32, 35, 38, 40, 44, 47;
39	1, 9, 17, 25, 33, 41, 45;
40	10, 26, 42;
41	11, 27, 43.

Donc *un nombre entier quelconque est la somme de quarante et un bicarrés, au plus.*

On observera que la démonstration précédente suppose le théorème vérifié jusqu'à $N = 2 \cdot 3^4$; il est facile de le constater sur les *Tables arithmétiques* de Reuschle.